

Teoria Sterowania w Zadaniach I

Janusz Nowakowski i Piotr Suchomski

18 października 2006

Spis rzeczy

| | | |
|----------|--|------------|
| 1 | Liniiowe równanie różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach jako podstawowy model układu dynamicznego. Modele równoważne podstawowemu | 5 |
| 1.1 | Zastosowanie przekształcenia Laplace'a | 5 |
| 1.2 | Transmitancja operatorowa oraz charakterystyki czasowe układu dynamicznego | 10 |
| 1.3 | Przekształcanie schematów strukturalnych | 17 |
| 2 | Modelowanie układów dynamicznych za pomocą stacjonarnych modeli wejściowo-wyjściowych. | 25 |
| 2.1 | Modelowanie elementów układów sterowania | 25 |
| 2.2 | Modelowanie prostych układów regulacji | 49 |
| 3 | Czasowe i częstotliwościowe charakterystyki układów dynamicznych | 57 |
| 3.1 | Układy pierwszego rzędu | 57 |
| 3.2 | Układy drugiego rzędu | 62 |
| 3.3 | Układy wyższych rzędów. Obiekty z opóźnieniem | 83 |
| 4 | Badanie stabilności liniowych układów sterowania. Ocena ustalonych uchybów. Odporna stabilność. | 101 |
| 4.1 | Algebraiczne i częstotliwościowe metody badania stabilności . | 102 |
| 4.2 | Stabilność a dokładność regulacji. Układy statyczne i astatyczne | 138 |
| 4.3 | Badanie skutków niepewności nominalnego modelu obiektu . | 154 |

Rozdział 1

Liniowe równanie różniczkowe zwyczajne o stałych współczynnikach jako podstawowy model układu dynamicznego. Modele równoważne podstawowemu

W rozdziale tym rozważono zastosowanie liniowych równań różniczkowych zwyczajnych o stałych współczynnikach jako podstawowych modeli wejściowo-wyjściowych układów dynamicznych. Pokazano w jaki sposób można wykorzystać przekształcenie Laplace'a do wyznaczania rozwiązań takich równań oraz do oceny początkowych i końcowych (ustalonych) wartości modelowanych procesów. Wprowadzono pojęcie transmitancji operatorowej układu dynamicznego oraz rozważono wyznaczanie typowych charakterystyk czasowych na podstawie takich transmitancji. Omówiono podstawowe zasady przekształcania schematów strukturalnych oraz grafów sygnałowych traktowanych jako dogodne reprezentacje modeli układów dynamicznych.

1.1 Zastosowanie przekształcenia Laplace'a

Przykład 1.1.1 Rozwiąż jednorodne równanie różniczkowe liniowe

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 0$$

z warunkami początkowymi: $y(0^+) = a$ oraz $\dot{y}(0^+) = b$.

Rozwiązanie Dokonując transformacji Laplace'a, uzyskujemy $s^2Y(s) - sy(0^+) - \dot{y}(0^+) + 5(sY(s) - y(0^+)) + 6Y(s) = 0$, skąd wynika, że

$$Y(s) = \frac{5a + b + as}{6 + 5s + s^2} = \frac{5a + b + as}{(2 + s)(3 + s)}.$$

Biegunki transformaty $Y(s)$ są więc biegunami pojedynczymi. Zatem, rozkładając $Y(s)$ na ułamki proste, otrzymujemy

$$Y(s) = \frac{3a + b}{2 + s} - \frac{2a + b}{3 + s}.$$

Rozwiązanie w dziedzinie czasu wyznaczamy, dokonując odwrotnej transformacji Laplace'a

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = (3a + b) \cdot e^{-2t} - (2a + b) \cdot e^{-3t}, \quad t \geq 0. \quad (1.1)$$

Sprawdźmy otrzymany wynik, korzystając ze wzoru Heaviside'a

$$y(t) = \frac{L(s)}{M'(s)} \Big|_{s=-2} \cdot e^{-2t} + \frac{L(s)}{M'(s)} \Big|_{s=-3} \cdot e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

w którym $Y(s) = \frac{L(s)}{M(s)}$ oraz $M'(s) = \frac{dM(s)}{ds}$. Zatem, uwzględniając równość $M'(s) = 5 + 2s$, otrzymujemy wyrażenie dane wzorem (1.1).

Przykład 1.1.2 Rozwiąż równanie całkowo-różniczkowe

$$\dot{y}(t) + 4 \int_0^t e^{(t-\tau)} y(\tau) d\tau + 3y(t) = 1, \quad y(0^+) = 1.$$

Rozwiązanie Dokonując transformacji Laplace'a, otrzymujemy $sY(s) - y(0^+) + 4 \cdot \mathcal{L}(e^t * y(t)) + 3Y(s) = 1/s$. Skąd wynika, że

$$Y(s) = \frac{s - 1}{s(1 + s)} = \frac{1}{1 + s} - \frac{1}{s(1 + s)}$$

a następnie (por. *dodatek 1*)

$$y(t) = e^{-t} - (1 - e^{-t}) = 2e^{-t} - 1, \quad t \geq 0.$$

Przykład 1.1.3 Rozwiąż niejednorodne równanie różniczkowe

$$y^{(3)}(t) + 4y^{(2)}(t) + 4y^{(1)}(t) + 3y(t) = u(t)$$

zakładając wymuszenie $u(t)$ w postaci jednostkowej funkcji skokowej oraz warunki początkowe: $y(0^+) = 1$, $y^{(1)}(0^+) = 2$, $y^{(2)}(0^+) = 3$.

Rozwiązanie Korzystając z następujących wzorów:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(y^{(1)}(t)) &= sY(s) - y(0^+) \\ \mathcal{L}(y^{(2)}(t)) &= s^2Y(s) - sy(0^+) - y^{(1)}(0^+) \\ \mathcal{L}(y^{(3)}(t)) &= s^3Y(s) - s^2y(0^+) - sy^{(1)}(0^+) - y^{(2)}(0^+)\end{aligned}$$

wyznaczamy

$$Y(s) = \frac{1 + 15s + 6s^2 + s^3}{s(3 + 4s + 4s^2 + s^3)}. \quad (1.2)$$

Rozkładając (1.2) na ułamki proste, uzyskujemy

$$Y(s) = \frac{1}{3s} + \frac{0.80952}{3 + s} - \frac{-4.28571 + 0.14286s}{0.86603^2 + (0.5 + s)^2}.$$

Na tej podstawie otrzymujemy $y(t) = 0.33333 + 0.80952e^{-3t} + 5.03322e^{-5t} \cdot \sin(0.86603t - 0.02839)$, $t \geq 0$.

Przykład 1.1.4 Znaleźć wartość początkową pochodnej sygnału $f(t)$, gdy dana jest jego transformata Laplace'a

$$F(s) = \frac{1 + 3s}{1 + s + s^2}.$$

Rozwiązanie Niech $g(t) = \dot{f}(t)$. Wtedy $G(s) = \mathcal{L}(g(t)) = sF(s) - f(0^+)$. Ale

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s + 3s^2}{1 + s + s^2} = 3. \quad (1.3)$$

Stąd

$$G(s) = \frac{s + 3s^2}{1 + s + s^2} - 3 = \frac{-3 - 2s}{1 + s + s^2}.$$

Mamy zatem

$$g(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-3s - 2s^2}{1 + s + s^2} = -2.$$

Formalnie rzecz biorąc, należałoby sprawdzić, czy istnieje granica $g(0^+)$. Wyznamy $f(t)$. Ze wzoru (1.3) wynika, że mianownik transformaty $F(s)$ posiada zera zespolone: $1 + s + s^2 = 3/4 + (1/2 + s)^2$. Przekształcając $f(t) = -1/\sqrt{3} \cdot e^{-t/2} \cdot \sin(\sqrt{3}t/2) + 3e^{-t/2} \cdot \cos(\sqrt{3}t/2)$, $t \geq 0$, oraz $f(0^+) = 3$. Pochodna $f(t)$ wyraża się wzorem $g(t) = -\sqrt{3}e^{-t/2} \cdot \sin(\sqrt{3}t/2) - 2e^{-t/2} \cdot \cos(\sqrt{3}t/2)$, $t \geq 0$. A zatem $g(0^+) = -2$.

Zadanie 1.1.1 Posługując się metodą transformacji Laplace'a, rozwiąż jednorodne równanie różniczkowe

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 0, \quad y(0^+) = a, \quad \dot{y}(0^+) = b.$$

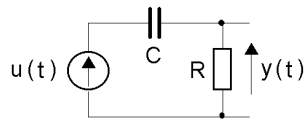
Odpowiedź $y(t) = (2a + b) \cdot e^{-t} - (a + b) \cdot e^{-2t}, t \geq 0.$

Zadanie 1.1.2 Stosując metodę transformacji Laplace'a, znajdź rozwiązanie niejednorodnego równania różniczkowego

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 5y(t) = 3 \cdot 1(t), \quad y(0^+) = 0, \quad \dot{y}(0^+) = 0.$$

Odpowiedź $y(t) = 0.6 - 0.3e^{-t} \cdot \sin 2t - 0.6e^{-t} \cdot \cos 2t, t \geq 0.$

Zadanie 1.1.3 Schemat ideowy pokazany na rys. 1.1 jest modelem rzeczywistego układu różniczkującego. Oblicz odpowiedź $y(t)$ tego układu na pobudzenie skokowe $u(t) = E \cdot 1(t)$, jeżeli na pojemności C znajduje się ładunek początkowy $+Q_0$.



Rys. 1.1. Obwód RC

Odpowiedź $y(t) = (E - U_0) \cdot e^{-t/T}, t \geq 0$, gdzie $U_0 = Q_0/C$ oraz $T = RC$.

Zadanie 1.1.4 Model obiektu dany jest równaniem różniczkowym

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t)$$

przy czym wszystkie warunki początkowe są zerowe. Zakładając sygnał wejściowy $u(t) = 2 \cos 3t$, $t \geq 0$, wyznacz sygnał $y(t)$.

Odpowiedź $y(t) = -0.0667 \cos 3t + 0.1333 \sin 3t + 0.1667 e^{-3t} - 0.1e^{-t}$, $t \geq 0$.

Zadanie 1.1.5 Rozwiąż układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dot{y}_1 - 2\dot{y}_2 + y_1 = 1(t) \\ y_1 + \dot{y}_2 - 2y_2 = e^{-t} \cdot 1(t) \\ y_1(0^+) = 1, \quad y_2(0^+) = 0. \end{cases}$$

Odpowiedź $y_1(t) = 1 - \frac{2}{3}e^{-2t} + e^{-t} - \frac{1}{3}e^t$ oraz $y_2(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{1}{3}e^t$, $t \geq 0$.

Zadanie 1.1.6 Korzystając z całki Duhamela, wyznacz oryginał transformaty

$$F(s) = \frac{s}{(a+s)(b+s)}, \quad a \neq b.$$

Odpowiedź $f(t) = \frac{a \cdot e^{-at} - b \cdot e^{-bt}}{a-b}$, $t \geq 0$.

Zadanie 1.1.7 Wyznacz transformatę Laplace'a funkcji

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(t-n).$$

Odpowiedź $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}$.

Zadanie 1.1.8 Wyznacz transformatę Laplace'a funkcji ($n = 0, 2, 4, \dots$)

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \leq t < n+1 \\ -1 & \text{dla } n+1 \leq t < n+2. \end{cases}$$

Odpowiedź $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})}$.

Zadanie 1.1.9 Znajdź oryginał $g_n(t) = \mathcal{L}^{-1}(G_n(s))$ transformaty

$$G_n(s) = \prod_{i=1}^n (i+s)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odpowiedź $g_n(t) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-it}$, $t \geq 0$, gdzie $a_i = \frac{(-1)^{i-1}}{(i-1)!(n-i)!}$, $i \in \mathbb{N}$.

Zadanie 1.1.10 Znajdź oryginał transformaty

$$G_n(s) = \prod_{i=1}^{n-1} (2i+s) \cdot \prod_{i=1}^n (2i-1+s)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Odpowiedź Rozwiązanie dane jest wzorem

$$g_n(t) = \mathcal{L}^{-1}(G_n(s)) = \sum_{i=1}^n a_i e^{-(2i-1)t}, \quad t \geq 0$$

przy czym

$$a_i = \frac{(2(i-1)-1)!! \cdot (2(n-i)-1)!!}{(2(i-1))!! \cdot (2(n-i))!!}$$

zaś: $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2k-1) = (2k-1)!!$, $2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2k) = (2k)!!$ oraz $k!! = 1$ dla $k \leq 0$.

1.2 Transmitancja operatorowa oraz charakterystyki czasowe układu dynamicznego

Przykład 1.2.1 Oblicz odpowiedź impulsową oraz skokową układu o transmitancji operatorowej

$$G(s) = \frac{24 + 30s + 8s^2}{24 + 26s + 9s^2 + s^3}.$$

Rozwiązanie Ponieważ $G(s)$ jest transmitancją o jednokrotnych biegunach

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{24 + 30s + 8s^2}{(2+s)(3+s)(4+s)}$$

zatem odpowiedź impulsową obliczyć można w następujący sposób:

$$g(t) = \frac{L(s)}{M'(s)} \Big|_{s=-2} \cdot e^{-3t} + \frac{L(s)}{M'(s)} \Big|_{s=-3} \cdot e^{-3t} + \frac{L(s)}{M'(s)} \Big|_{s=-4} \cdot e^{-4t}, \quad t \geq 0$$

gdzie $M'(s) = \frac{dM(s)}{ds} = 26 + 18s + 3s^2$. Wynika stąd, że

$$g(t) = -2e^{-2t} - 6e^{-3t} + 16e^{-4t}, \quad t \geq 0.$$

Odpowiedź skokową obliczamy analogicznie ze wzoru

$$h(t) = \frac{L(s)}{M(s)} \Big|_{s=0} + \frac{L(s)}{sM'(s)} \Big|_{s=-2} \cdot e^{-2t} + \frac{L(s)}{sM'(s)} \Big|_{s=-3} \cdot e^{-3t} + \\ + \frac{L(s)}{sM'(s)} \Big|_{s=-4} \cdot e^{-4t}, \quad t \geq 0.$$

Skąd ostatecznie otrzymujemy

$$h(t) = 1 + e^{-2t} + 2e^{-3t} - 4e^{-4t}, \quad t \geq 0.$$

Przykład 1.2.2 Oblicz oryginał transformaty

$$F(s) = \frac{1}{s(1+Ts)}$$

korzystając: **a)** z metody rozkładu na ułamki proste, **b)** ze wzorów Heaviside'a, **c)** z twierdzenia Borela, **d)** z twierdzenia o transformacji całki oryginału.

Rozwiązanie **a)** Zapisując $F(s)$ w postaci

$$F(s) = \frac{a}{s} + \frac{b}{1+Ts}$$

łatwo stwierdzamy, że $a = 1$ oraz $b = -T$. Zatem, zgodnie z podstawowymi regułami transformacji Laplace'a (por. *dodatek 1*), otrzymujemy $f(t) = 1 - e^{-t/T}$, $t \geq 0$.

b) Wyrażając $F(s)$ jako

$$F(s) = \frac{L(s)}{sM(s)}$$

gdzie $L(s) = 1$ oraz $M(s) = 1 + Ts$, oryginał $f(t)$ możemy przedstawić następująco:

$$f(t) = \frac{L(s)}{M(s)} \Big|_{s=0} + \frac{L(s)}{sM'(s)} \Big|_{s=-1/T} \cdot e^{-t/T}, \quad t \geq 0$$

przy czym $M'(s) = \frac{dM(s)}{ds} = T$. Mamy zatem $f(t) = 1 - e^{-t/T}$, $t \geq 0$.

c) Zapisując $F(s)$ w postaci

$$F(s) = \mathcal{L} \left(\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \right) \star \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{1+Ts} \right) \right)$$

oryginał $f(t)$ obliczamy ze wzoru

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \right) \star \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{1+Ts} \right).$$

Ponieważ

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{s} \right) = 1(t) \quad \text{oraz} \quad \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{1+Ts} \right) = \frac{e^{-t/T}}{T} \cdot 1(t)$$

przeto $f(t) = T^{-1} \cdot \int_0^t e^{-(t-\tau)/T} d\tau = 1 - e^{-t/T}$, $t \geq 0$.

d) Jak łatwo zauważyć

$$F(s) = \mathcal{L} \left(\int_0^t \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{1+Ts} \right) d\tau \right).$$

Obowiązuje bowiem równość

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{1}{1+Ts} \right) = \frac{e^{-t/T}}{T} \cdot 1(t).$$

Na tej podstawie otrzymujemy $f(t) = -e^{\tau/T} \Big|_0^t = 1 - e^{-t/T}$, $t \geq 0$.

Przykład 1.2.3 Znajdź oryginał transformaty

$$F(s) = \frac{1 + 3s + s^2}{(1+s)^3}.$$

Rozwiązanie Przedstawiając $F(s)$ w postaci

$$F(s) = \frac{a_1}{1+s} + \frac{a_2}{(1+s)^2} + \frac{a_3}{(1+s)^3}$$

stwierdzamy, że $a_1(1+s)^2 + a_2(1+s) + a_3 = 1 + 3s + s^2$. Zatem: $a_1 = 1$, $2a_1 + a_2 = 3$ oraz $a_1 + a_2 + a_3 = 1$. W efekcie mamy: $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ oraz $a_3 = -1$. Ze wzoru

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(-\alpha + s)^n}\right) = \frac{t^{n-1} \cdot e^{\alpha t}}{(n-1)!}, \quad n \geq 1, \quad t \geq 0$$

uzyskujemy rozwiązanie $f(t) = (1 + t - 0.5t^2) \cdot e^{-t}$, $t \geq 0$.

Przykład 1.2.4 Znajdź odpowiedź impulsową oraz skokową modelu danego transmitancją operatorową

$$G(s) = \frac{45 + 20s + 7s^2}{15 + 11s + 5s^2 + s^3} = \frac{45 + 20s + 7s^2}{(3+s)(2^2 + (1+s)^2)}. \quad (1.4)$$

Rozwiązanie Rozkładając (1.4) na ułamki proste, otrzymujemy

$$G(s) = \frac{6}{3+s} + \frac{5+s}{2^2 + (1+s)^2}.$$

Odpowiedzią impulsową jest zatem

$$g(t) = 6e^{-3t} + (\cos 2t + 2 \sin 2t) \cdot e^{-t}, \quad t \geq 0.$$

Z rozkładu na ułamki proste transformaty odpowiedzi skokowej $H(s)$

$$H(s) = \frac{G(s)}{s} = \frac{3}{s} - \frac{2}{3+s} - \frac{1+s}{2^2 + (1+s)^2}$$

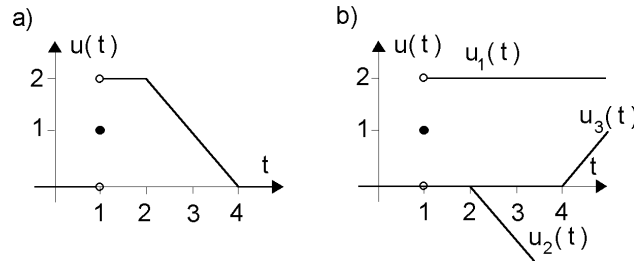
wynika, że odpowiedź ta ma postać

$$h(t) = 3 - 2e^{-3t} - e^{-t} \cdot \cos 2t, \quad t \geq 0.$$

Przykład 1.2.5 Dla modelu o transmitancji

$$G(s) = \frac{2 + 8s + 16s^2}{(2+s)(1+s)^2}$$

wyznacz odpowiedź na pobudzenie $u(t)$ pokazane na rys. 1.2a.



Rys. 1.2. Przykład pobudzenia

Rozwiązanie Zauważmy (por. rys. 1.2b), że $u(t) = u_1(t) + u_2(t) + u_3(t)$, gdzie: $u_1(t) = 2 \cdot 1(t-1)$, $u_2(t) = -(t-2) \cdot 1(t-2)$ oraz $u_3(t) = (t-4) \cdot 1(t-4)$. Transformata pobudzenia $u(t)$ dana jest zatem wzorem

$$U(s) = \frac{2e^{-s}}{s} - \frac{e^{-2s}}{s^2} + \frac{e^{-4s}}{s^2}.$$

Odpowiedź uzyskuje się po odwróceniu transformaty $G(s) \cdot U(s)$, co wymaga znalezienia dwóch transformat odwrotnych

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{2 + 8s + 16s^2}{s(2+s)(1+s)^2} \right) \quad \text{oraz} \quad \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{2 + 8s + 16s^2}{s^2(2+s)(1+s)^2} \right)$$

a następnie zastosowania twierdzenia o translacji w dziedzinie oryginału. W pierwszym przypadku zachodzi

$$\frac{2 + 8s + 16s^2}{s(2+s)(1+s)^2} = \frac{L(s)}{sM(s)} = \frac{a_0}{s} + \frac{a_{11}}{1+s} + \frac{a_{12}}{(1+s)^2} + \frac{a_2}{2+s}$$

przy czym:

$$a_0 = \frac{L(s)}{M(s)} \Big|_{s=0}, \quad a_{11} = \frac{1}{(2-1)!} \frac{d^{(2-1)}}{ds^{(2-1)}} \left(\frac{L(s)}{sM_1(s)} \right) \Big|_{s=-1}$$

$$a_{12} = \frac{1}{(2-2)!} \frac{d^{(2-2)}}{ds^{(2-2)}} \left(\frac{L(s)}{sM_1(s)} \right) \Big|_{s=-1}, \quad a_2 = \frac{L(s)}{sM_1(s)} \Big|_{s=-2}$$

gdzie $M_1(s) = 2 + s$. Na tej podstawie otrzymujemy

$$\frac{2 + 8s + 16s^2}{s(2+s)(1+s)^2} = \frac{1}{s} + \frac{24}{1+s} - \frac{10}{(1+s)^2} - \frac{25}{2+s}$$

skąd wynika, że

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{2 + 8s + 16s^2}{s(2+s)(1+s)^2} \right) = 1 + (24 - 10t) \cdot e^{-t} - 25e^{-2t}, \quad t \geq 0. \quad (1.5)$$

W podobny sposób wyznacza się drugą transformatę odwrotną:

$$\mathcal{L}^{-1} \left(\frac{2 + 8s + 16s^2}{s^2(2+s)(1+s)^2} \right) = \frac{3}{2} + t - (14 - 10t) \cdot e^{-t} + \frac{25}{2}e^{-2t}, \quad t \geq 0. \quad (1.6)$$

Ze wzorów (1.5) i (1.6) oraz twierdzenia o translacji w dziedzinie oryginału wnioskujemy, że

$$\begin{aligned} y(t) = & (2 + (48 - 20(t-1)) \cdot e^{-(t-1)} - 50e^{-2(t-1)}) \cdot 1(t-1) - \\ & -(1.5 + (t-2) - (14 - 10(t-2)) \cdot e^{-(t-2)} + 12.5e^{-2(t-2)}) \cdot 1(t-2) + \\ & +(1.5 + (t-4) - (14 - 10(t-4)) \cdot e^{-(t-4)} + 12.5e^{-2(t-4)}) \cdot 1(t-4). \end{aligned}$$

Zadanie 1.2.1 Określić odpowiedź impulsową układu o transmitancji operatorowej

$$G(s) = \frac{1}{s^2(a+s)}.$$

Odpowiedź $g(t) = \frac{t}{a} + \frac{e^{-at}-1}{a^2}, t \geq 0.$

Zadanie 1.2.2 Dla modelu danego transmitancją operatorową

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{3 + s + (1+s)^2(1+3s+s^2)}{(1+s)^2(1+3s+s^2)}$$

ustal wartość sygnału wyjściowego $y(t)$ dla $t = 0$ i $t \rightarrow \infty$, jeżeli sygnał wejściowy $u(t)$ ma postać skoku jednostkowego.

Odpowiedź $\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = 1$ oraz $\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = 4.$

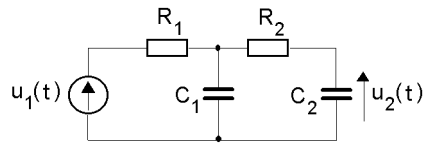
Zadanie 1.2.3 Oblicz odpowiedź impulsową układu opisanego daną transmitancją:

- a) $G(s) = \frac{3+2s+s^2}{(1+s)^3},$
- b) $G(s) = \frac{7+9s+5s^2+s^3}{(1+s)(2+s)},$
- c) $G(s) = \frac{12+2s}{5+2s+s^2}.$

Odpowiedź Odpowiedzi impulsowe (dla $t \geq 0$):

- a) $g(t) = (1 + t^2) \cdot e^{-t}$,
 b) $g(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} + 2\delta(t) + 2e^{-t} - e^{-2t}$,
 c) $g(t) = (5 \sin 2t + 2 \cos 2t) \cdot e^{-t}$.

Zadanie 1.2.4 Schemat ideowy pokazany na rys. 1.3 jest przykładem modelu układu drugiego rzędu. Traktując napięcie $u_1(t)$ jako wielkość wejściową, zaś $u_2(t)$ jako wielkość wyjściową, wyznacz operatorową transmitancję tego układu.



Rys 1.3. Układ RC drugiego rzędu

Odpowiedź Rozważana transmitancja ma postać

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + (T_1 + T_2 + T_{12})s + T_1 T_2 s^2}$$

gdzie: $T_1 = R_1 C_1$, $T_2 = R_2 C_2$ oraz $T_{12} = R_1 C_2$.

Zadanie 1.2.5 Wyznacz odpowiedź impulsową oraz skokową obiektu modelowanego daną transmitancją operatorową:

- a) $G(s) = \frac{39+26s+5s^2}{(1+s)(3+s)(4+s)}$,
 b) $G(s) = \frac{45+20s+7s^2}{15+11s+5s^2+s^3}$,
 c) $G(s) = \frac{36+12s+4s^2+s^3}{((2+s)(3+s))^2}$,
 d) $G(s) = \frac{2+s+s^2}{(-1+s)(2+s)(1+s^2)}$,
 e) $G(s) = \frac{8+12s+16s^2+24s^3+36s^4+48s^5}{((1+s)(2+s))^3}$,
 f) $G(s) = \frac{4+8s+16s^2+36s^3}{s^2(1+s)(2+s)}$.

Odpowiedź Odpowiedzi impulsowe (dla $t \geq 0$):

- a) $g(t) = 3e^{-t} - 3e^{-3t} + 5e^{-4t}$,
- b) $g(t) = 6e^{-3t} + (2 \sin 2t + \cos 2t) \cdot e^{-t}$,
- c) $g(t) = -(32 - 20t) \cdot e^{-2t} + (33 + 9t) \cdot e^{-3t}$,
- d) $g(t) = 0.6667e^t - 0.2667e^{-2t} - 0.4472 \cos(t - 0.4636)$,
- e) $g(t) = -(908 - 220t + 12t^2) \cdot e^{-t} + (956 + 388t + 552t^2) \cdot e^{-2t}$,
- f) $g(t) = 1 + 2t - 24e^{-t} + 59e^{-2t}$.

Odpowiedzi skokowe (dla $t \geq 0$):

- a) $h(t) = 3.25 - 3e^{-t} + e^{-3t} - 1.25e^{-4t}$,
- b) $h(t) = 3 - 2e^{-3t} - e^{-t} \cdot \cos 2t$,
- c) $h(t) = 1 + (11 - 10t) \cdot e^{-2t} - (12 + 3t) \cdot e^{-3t}$,
- d) $h(t) = -1 + 0.6667e^t + 0.1333e^{-2t} - 0.4472 \sin(t - 0.4636)$,
- e) $h(t) = 1 + (712 - 196t + 12t^2) \cdot e^{-t} - (713 + 470t + 276t^2) \cdot e^{-2t}$,
- f) $h(t) = 5.5 + t + t^2 + 24e^{-t} - 29.5e^{-2t}$.

Zadanie 1.2.6 Określ odpowiedź układu opisanego transmitancją $G(s)$ na zadane pobudzenie $u(t)$:

- a) $G(s) = \frac{20+40s}{s(10+7s+s^2)}$, $u(t) = t \cdot 1(t)$,
- b) $G(s) = \frac{12+24s+36s^2}{(2+s)^2(3+s)}$, $u(t) = (-1 + t^2) \cdot 1(t)$.

Odpowiedź Poszukiwana odpowiedź dana jest wzorem:

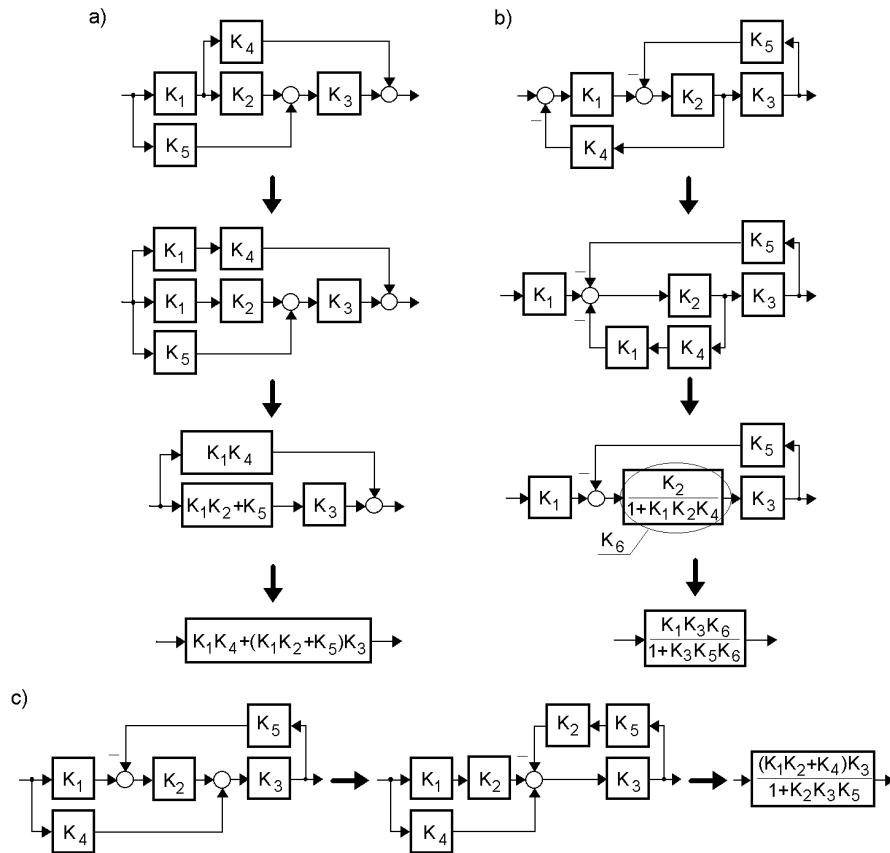
- a) $y(t) = -2.02 + 2.6t + t^2 + 2.5e^{-2t} - 0.48e^{-5t}$, $t \geq 0$,
- b) $y(t) = 2.0556 + 1.3333t + t^2 - (70.5 - 27t) \cdot e^{-2t} + 68.4444e^{-3t}$, $t \geq 0$.

Zadanie 1.2.7 Układ dynamiczny opisany jest transmitancją $G(s) = Y(s)/U(s) = 1/s$. Znajdź odpowiedź $y(t)$ tego układu na pobudzenie o postaci $u(t) = \sin t \cdot 1(t)$.

Odpowiedź $y(t) = (1 - \cos t) \cdot 1(t)$.

1.3 Przekształcanie schematów strukturalnych

Przykład 1.3.1 Na rys. 1.4 pokazane są schematy strukturalne trzech układów (dla uproszczenia rysunków pominięto oznaczenie zależności transmitancji operatorowej od zmiennej zespolonej s). Dla każdego z tych układów należy wyznaczyć zastępczą transmitancję operatorową.



Rys. 1.4. Schematy strukturalne układów dynamicznych

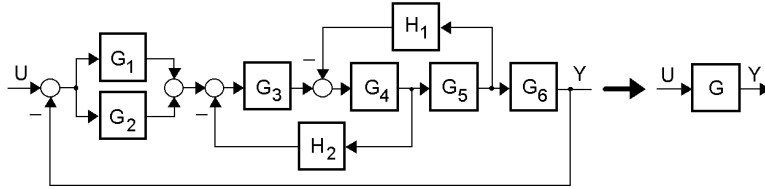
Rozwiązanie Przekształcenia schematów powyższych układów, zgodnie z regułami 'algebry schematów strukturalnych', pokazano również na rys. 1.4. Jak widać, właściwe zastosowanie owych reguł w żadnym z rozważanych przypadków nie wymaga więcej niż trzech kroków do tego, aby otrzymać wymagane rozwiązanie.

Przykład 1.3.2 Na rys. 1.5 przedstawiono schemat strukturalny pewnego zamkniętego układu regulacji (dla uproszczenia rysunków pominięto oznaczenie zależności transmitancji operatorowej od zmiennej zespolonej s).

Transmitancje poszczególnych członów tego układu mają postać:

$$H_1(s) = h_1, \quad H_2(s) = h_2, \quad G_1(s) = k_1, \quad G_2(s) = \frac{k_2}{s}, \quad G_3(s) = \frac{1}{1 + T_3 s}$$

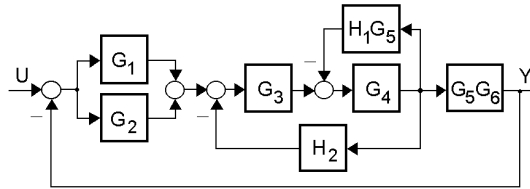
$$G_4(s) = \frac{1}{1 + T_4s}, \quad G_5(s) = \frac{1}{1 + T_5s}, \quad G_6(s) = \frac{1}{1 + T_6s}.$$



Rys. 1.5. Schemat strukturalny układu regulacji

Podaj zastępczą transmitancję $G(s) = Y(s)/U(s)$ tego układu.

Rozwiązanie Jak widać, w rozważanym układzie występują trzy niezagnieżdżone pętle sprzężeń zwrotnych. Pętle te jednak łatwo uczynić zagnieżdżonymi: wystarczy w tym celu przenieść węzeł zaczepowy z wyjścia członu o transmitancji $G_5(s)$ na jego wejście. Tak postępując, uzyskujemy układ o strukturze przedstawionej na rys. 1.6.



Rys. 1.6. Przekształcony schemat strukturalny układu z rys. 1.5

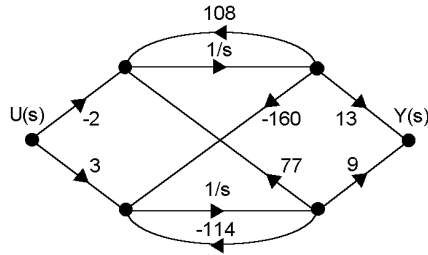
Transmitancję tego układu łatwo obliczamy ze wzoru

$$G = \frac{G_3G_4G_5G_6(G_1 + G_2)}{1 + H_1G_4G_5 + H_2G_3G_4 + G_3G_4G_5G_6(G_1 + G_2)}.$$

Podstawiając dane składowych członów, ostatecznie stwierdzamy, że

$$G(s) = \frac{k_2 + k_1s}{k_2 + k_1s + (h_2(1 + T_5s) + s(1 + T_3s)(h_1 + (1 + T_4s)(1 + T_5s)))}.$$

Przykład 1.3.3 Na rys. 1.7 przedstawiono graf sygnałowy. Opierając się na regule Masona, wyznacz transmitancję operatorową $Y(s)/U(s)$.



Rys. 1.7. Graf przepływu sygnału

Rozwiązanie W grafie wyróżniamy cztery ścieżki bezpośrednie o transmitancjach:

$$P_1(s) = -2 \cdot s^{-1} \cdot 13 = -26s^{-1}$$

$$P_2(s) = -2 \cdot s^{-1} \cdot (-160) \cdot s^{-1} \cdot 9 = 2880s^{-2}$$

$$P_3(s) = 3 \cdot s^{-1} \cdot 9 = 27s^{-1}$$

$$P_4(s) = 3 \cdot s^{-1} \cdot 77 \cdot s^{-1} \cdot 13 = 3003s^{-2}$$

oraz trzy pętle o transmitancjach:

$$L_1(s) = 108s^{-1}$$

$$L_2(s) = s^{-1} \cdot (-160) \cdot s^{-1} \cdot 77 = -12320s^{-2}$$

$$L_3(s) = -114s^{-1}.$$

Pętle $L_1(s)$ oraz $L_3(s)$ są pętlami nieskojarzonymi. Wyznacznik główny grafu ma zatem postać

$$\Delta(s) = 1 - (L_1(s) + L_2(s) + L_3(s)) + L_1(s)L_3(s) = 1 + 6s^{-1} + 8s^{-2}.$$

Podwyznaczniki grafu związane ze ścieżkami $P_1(s)$, $P_2(s)$, $P_3(s)$ oraz $P_4(s)$ równają się odpowiednio:

$$\Delta_1(s) = 1 + 114s^{-1}$$

$$\Delta_2(s) = 1$$

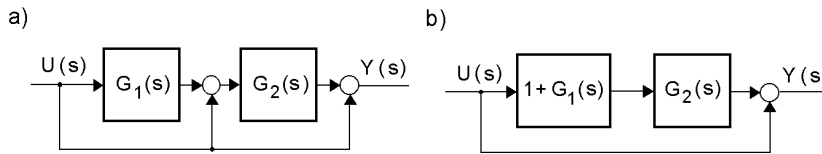
$$\Delta_3(s) = 1 - 108s^{-1}$$

$$\Delta_4(s) = 1.$$

Po przekształceniach otrzymujemy

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{\Delta(s)} \sum_{i=1}^4 P_i(s) \Delta_i(s) = \frac{3 + s}{8 + 6s + s^2}.$$

Zadanie 1.3.1 Na rys. 1.8a pokazany jest złożony schemat strukturalny. Podaj schemat układu równoważnego z jednym węzłem sumacyjnym, a następnie wyznacz transmitancję operatorową $Y(s)/U(s)$.

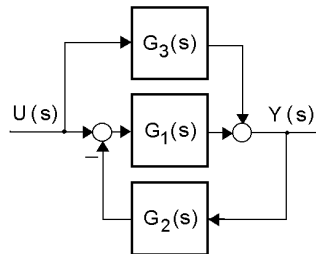


Rys. 1.8. Schemat strukturalny

Odpowiedź Przekształcony schemat dany jest na rys. 1.8b, zaś odpowiadająca mu transmitancja to

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = 1 + G_2(s) + G_1(s)G_2(s).$$

Zadanie 1.3.2 Stosując zasady przekształcania schematów strukturalnych, wyznacz operatorową transmitancję $Y(s)/U(s)$ układu o modelu pokazanym na rys. 1.9.

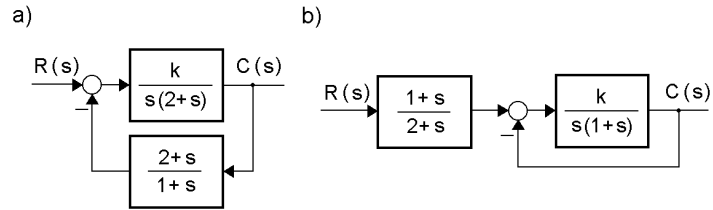


Rys. 1.9. Złożony schemat strukturalny

Odpowiedź Poszukiwana transmitancja ma postać

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_1(s) + G_3(s)}{1 + G_1(s)G_2(s)}.$$

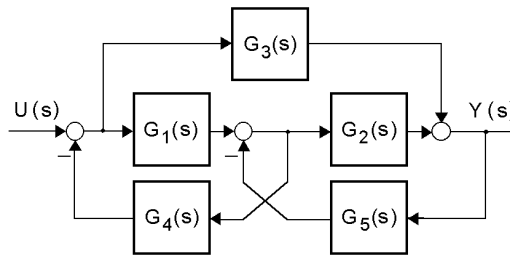
Zadanie 1.3.3 Wyznacz schemat równoważny schematowi z rys. 1.10a, zastępując sprzężenie zwrotne niejednostkowe sprzężeniem jednostkowym.



Rys. 1.10. Schemat strukturalny układu zamkniętego: **a)** układ z niejednostkowym sprzężeniem zwrotnym, **b)** układ ze sprzężeniem jednostkowym

Odpowiedź Układ równoważny pokazano na rys. 1.10b.

Zadanie 1.3.4 Postępując zgodnie z zasadami przekształcania schematów strukturalnych, wyznacz transmitancję $Y(s)/U(s)$ modelu z rys. 1.11.

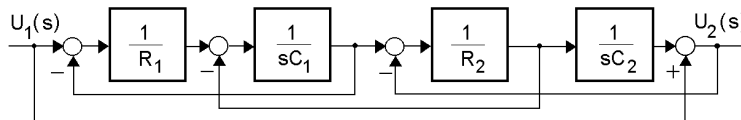


Rys. 1.11. Złożony schemat strukturalny

Odpowiedź Transmitancję operatorową tego modelu opisuje wzór

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{G_3(s) + G_1(s)G_2(s)}{1 + G_1(s)G_4(s) + G_2(s)G_5(s) - G_3(s)G_4(s)G_5(s)}$$

Zadanie 1.3.5 Stosując dla modelu z rys. 1.12 zasady przekształcania schematów strukturalnych, określ transmitancję operatorową $U_2(s)/U_1(s)$.

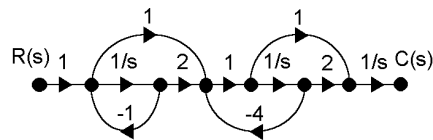


Rys. 1.12. Model układu dynamicznego

Odpowiedź Mamy

$$\frac{U_2(s)}{U_1(s)} = 1 - \frac{sR_1C_1}{(1 + sR_1C_1)(1 + sR_2C_2) + sR_1C_2}$$

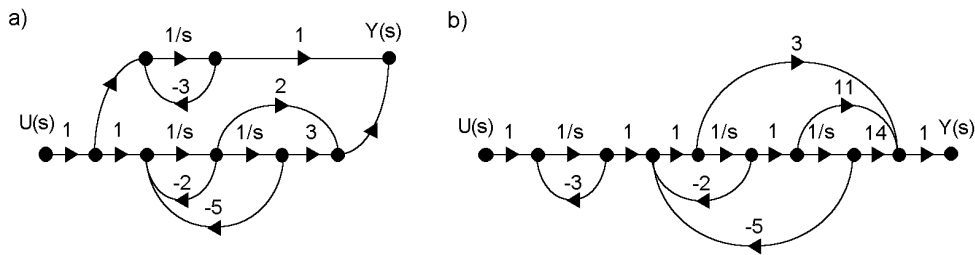
Zadanie 1.3.6 W oparciu o regułę Masona, wyznacz transmitancję operatorową $C(s)/R(s)$ układu modelowanego grafem danym na rys. 1.13.



Rys. 1.13. Graf sygnałowy

Odpowiedź $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{(2+s)^2}{s(1+s)(4+s)}$

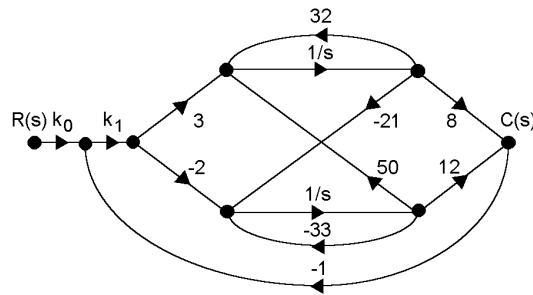
Zadanie 1.3.7 Udowodnij, że grafy pokazane na rys. 1.14a oraz 1.14b modelują tę samą transmitancję operatorową $Y(s)/U(s)$. Jaka to transmitancja?



Rys. 1.14. Grafy sygnałowe

Odpowiedź $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{14+11s+3s^2}{15+11s+5s^2+s^3}$

Zadanie 1.3.8 Korzystając z reguły Masona, podaj transmitancję operatorową $C(s)/R(s)$ układu modelowanego grafem z rys. 1.15.

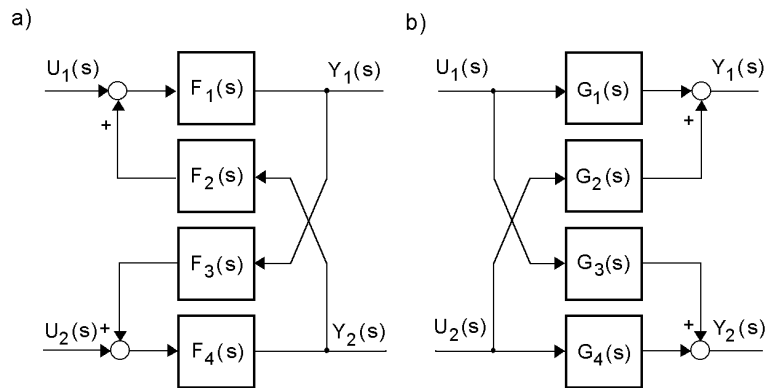


Rys. 1.15. Graf sygnałowy

Odpowiedź Szukana transmitancja to

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{4k_0k_1}{4k_1 - 6 + s + s^2}$$

Zadanie 1.3.9 Schemat strukturalny na rys. 1.16a jest modelem pewnego układu dynamicznego o dwóch wejściach i dwóch wyjściach. Należy sprowadzić ten schemat do równoważnej postaci pokazanej na rys. 1.16b.



Rys. 1.16. Schemat strukturalny układu dwuwymiarowego

Odpowiedź Transmitancje z rys. 1.16b:

$$G_1(s) = \frac{F_1(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)F_3(s)F_4(s)}, \quad G_2(s) = \frac{F_1(s)F_2(s)F_4(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)F_3(s)F_4(s)}$$

$$G_3(s) = \frac{F_1(s)F_3(s)F_4(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)F_3(s)F_4(s)}, \quad G_4(s) = \frac{F_4(s)}{1 + F_1(s)F_2(s)F_3(s)F_4(s)}$$

Rozdział 2

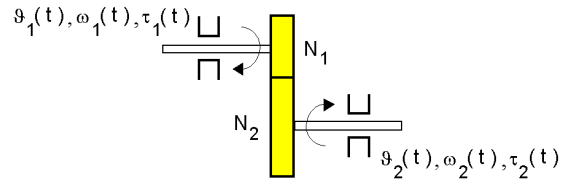
Modelowanie układów dynamicznych za pomocą stacjonarnych modeli wejściowo-wyjściowych.

Rozdział dotyczy zagadnień związanych z modelowaniem układów dynamicznych za pomocą stacjonarnych modeli wejściowo-wyjściowych. Pokazano w jaki sposób, czyniąc punktem wyjścia liniowe równania różniczkowe opisujące dynamikę danego obiektu, wyznaczać operatorową transmitancję wybranego toru sygnałowego tego obiektu. Rozważane są obiekty (procesy) mechaniczne, elektryczne, hydrauliczne oraz termiczne. W pierwszej kolejności zajmujemy się modelowaniem elementów układów sterowania, a następnie przechodzimy do modelowania prostych układów automatycznej regulacji.

2.1 Modelowanie elementów układów sterowania

Przykład 2.1.1 Określ matematyczny model idealnej przekładni zębatej. Podaj układ elektryczny o analogowym charakterze.

Rozwiązanie Modelowana przekładnia (rys. 2.1) jest przekładnią idealną. Oznacza to, iż nieodkształcalne koła zębate tej przekładni nie mają własnej bezwładności, oraz że w ruchu przekładni nie występują luzy i poślizgi.



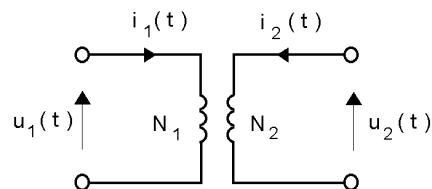
Rys. 2.1. Schemat idealnej przekładni

Niech rozważana przekładnia składa się z dwóch kół zębatych o promieniach odpowiednio r_1 oraz r_2 . Konsekwencjami przyjętego założenia są następujące relacje (proporcje): $r_1\vartheta_1(t) = r_2\vartheta_2(t)$ oraz $\tau_1(t)/r_1 = \tau_2(t)/r_2$, gdzie przez $\vartheta_1(t)$ oraz $\vartheta_2(t)$ oznaczono przemieszczenie kątowe pierwszego oraz drugiego koła zębatego, zaś $\tau_1(t)$ oraz $\tau_2(t)$ są stosownymi momentami obrotowymi związanymi z pierwszym oraz drugim kołem zębatym. Pierwsza z wymienionych relacji opisuje równość liniowych dróg wykonywanych przez odpowiednie punkty na obwodzie kół zębatych, zaś relacja druga wynika z równości sił wyznaczających rozważane momenty. Zakładając, że liczba zębów (N_1 oraz N_2) każdego koła zębatego przekładni jest proporcjonalna do jego promienia, otrzymuje się następujące zależności:

$$N_1\vartheta_1(t) = N_2\vartheta_2(t) \quad \text{oraz} \quad \frac{\tau_1(t)}{N_1} = \frac{\tau_2(t)}{N_2}. \quad (2.1)$$

Oznaczmy przez $\omega_1(t) = \dot{\vartheta}_1(t)$ oraz $\omega_2(t) = \dot{\vartheta}_2(t)$ prędkości kątowe odpowiednich kół. Jak łatwo zauważyć, prędkości te powiązane są równością $N_1\omega_1(t) = N_2\omega_2(t)$.

Analogowym układem elektrycznym jest idealny transformator o przekładni $N_1 : N_2$ (rys. 2.2).



Rys. 2.2. Schemat idealnego transformatora

Z zasady zachowania mocy chwilowej uzyskuje się równanie $u_1(t)i_1(t) = u_2(t)i_2(t)$, gdzie $u_1(t)$ oraz $i_1(t)$ oznacza napięcie oraz prąd w uzwojeniu wejściowym (pierwotnym), zaś $u_2(t)$ oraz $i_2(t)$ – w uzwojeniu wyjściowym

(wtórnym). Z zasady zachowania strumienia magnetycznego wynika równość $N_1 i_1(t) = N_2 i_2(t)$. Na tej podstawie wnioskujemy, że $u_1(t)/N_1 = u_2(t)/N_2$. Jak zatem widzimy, parami wielkości analogowych są odpowiednio moment obrotowy i napięcie oraz przemieszczenie kątowe i prąd. Impedancja Z_L , obciążająca wtórne uzwojenie idealnego transformatora, jest następująco transformowana do obwodu uzwojenia pierwotnego:

$$Z_{L_1} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \cdot Z_L.$$

Rozważając równanie ruchu wału wtórnego $J_L \ddot{\vartheta}_2(t) = \tau_2(t)$, po uzgodnieniu modelu idealnej przekładni (2.1), stwierdzamy, że $(N_1/N_2) J_L \cdot \ddot{\vartheta}_1(t) = (N_2/N_1) \cdot \tau_1(t)$. Równości tej nadać można równoważną formę

$$\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_L \cdot \ddot{\vartheta}_1(t) = \tau_1(t)$$

z której wynika, że moment bezwładności J_L wału wtórnego jest następująco transformowany na wał pierwotny:

$$J_{L_1} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \cdot J_L.$$

Przykład 2.1.2 Wyznacz transmitancję operatorową zaworu hydraulicznego (rys. 2.3), przyjmując jako wielkość wejściową zmianę ciśnienia $p_1(t)$, zaś jako wielkość wyjściową – zmianę natężenia przepływu $q(t)$ nieściśliwej cieczy.



Rys. 2.3. Schematyczne przedstawienie zaworu hydraulicznego

Równanie opisujące przepływ cieczy przez dany przekrój poprzeczny dane jest wzorem

$$q(t) = k \sqrt{p_1(t) - p_2(t)}, \quad p_1(t) \geq p_2(t) \quad (2.2)$$

w którym współczynnik k ma wartość stałą, wynikającą z konstrukcji zaworu. Zakłada się ponadto, że $p_2(t) = \bar{p}_2$, gdzie \bar{p}_2 odpowiada przyjętemu punktowi pracy (ustalonemu przepływowi).

Rozwiązanie Charakterystyka zaworu (wzór (2.2)) jest nieliniową funkcją argumentu $p_1(t)$. Linearyzując tę funkcję w otoczeniu punktu \bar{p}_1 , dla $p_1(t) = \bar{p}_1 + \Delta p_1(t)$ uzyskujemy formułę

$$k\sqrt{\bar{p}_1 + \Delta p_1(t) - \bar{p}_2} \approx k\sqrt{\bar{p}_1 - \bar{p}_2} \cdot \left(1 + \frac{\Delta p_1(t)}{2(\bar{p}_1 - \bar{p}_2)}\right) = \bar{q} + \Delta q(t)$$

gdzie $\bar{q} = k\sqrt{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}$ odpowiada natężeniu przepływu dla punktu \bar{p}_1 , zaś

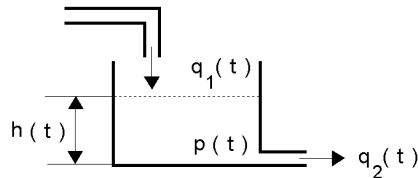
$$\Delta q(t) = \frac{k}{2\sqrt{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}} \cdot \Delta p_1(t)$$

jest zmianą tego natężenia wywołaną przez zmianę $\Delta p_1(t)$ ciśnienia $p_1(t)$. Poszukiwana transmitancja operatorowa jest zatem transmitancją członu proporcjonalnego

$$\frac{\Delta Q(s)}{\Delta P_1(s)} = \frac{k}{2\sqrt{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}}.$$

Liczbę $R = 2\sqrt{\bar{p}_1 - \bar{p}_2}/k$, zależną od punktu linearyzacji – czyli od warunków ustalonego przepływu cieczy przez dany przekrój – nazywamy rezystancją hydrauliczną tego przekroju.

Przykład 2.1.3 Na rys. 2.4 pokazano uproszczony schemat zbiornika przepływowego. Zakładając, że do zbiornika wpływa i wypływa zeń nieściśliwa ciecz, przekrój poprzeczny zbiornika ma powierzchnię S , zaś ściany zbiornika są sztywne, znajdź zależność pomiędzy ciśnieniem $p(t)$ a natężeniami objętościowych przepływów – odpowiednio wejściowego $q_1(t)$ oraz wyjściowego $q_2(t)$.



Rys. 2.4. Schemat zbiornika przepływowego

Rozwiązanie Z warunku ciągłości rozważanych strumieni wynika, że

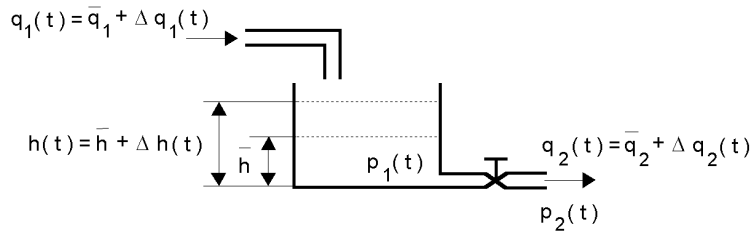
$$S \cdot \frac{dh(t)}{dt} = q_1(t) - q_2(t)$$

gdzie przez $h(t)$ oznaczono poziom cieczy w zbiorniku. Ciśnienie $p(t)$ związane jest z poziomem cieczy następującą zależnością: $p(t) = \rho gh(t)$, gdzie ρ oznacza gęstość cieczy, zaś g jest przyspieszeniem ziemskim. Na tej podstawie wnioskujemy, że $dp(t)/dt = (\rho g/S) \cdot (q_1(t) - q_2(t))$, co oznacza, iż obowiązuje formuła

$$p(t) - p(t_0) = \frac{\rho g}{S} \cdot \int_{t_0}^t (q_1(\tau) - q_2(\tau)) d\tau.$$

Jak widzimy, rozważany zbiornik można traktować jako element całkujący. Wielkość $C = S/(\rho g)$ nazywana jest pojemnością hydrauliczną.

Przykład 2.1.4 Zakładając zlinearyzowany opis dynamiki zbiornika ze swobodnym wypływem (rys. 2.5), wyznacz transmitancję operatorową w relacji zmiana natężenia przepływu $\Delta q_1(t)$ cieczy dopływającej – zmiana natężenia przepływu $\Delta q_2(t)$ cieczy wypływającej ze zbiornika (przez $q_1(t)$ oraz $q_2(t)$ oznaczono odpowiednie natężenia przepływów objętościowych).



Rys. 2.5. Schemat zbiornika ze swobodnym wypływem

Rozwiązanie Natężenie przepływu $q_2(t)$ cieczy wypływającej ze zbiornika zależy od różnicy ciśnień $p_1(t) - p_2(t)$ po obu stronach zaworu:

$$q_2(t) = k\sqrt{p_1(t) - p_2(t)}, \quad p_1(t) \geq p_2(t), \forall t$$

gdzie k jest współczynnikiem zależnym między innymi od przekroju zaworu. Z założenia o swobodnym wypływie wynika, że jako różnicę ciśnień $p_1(t) - p_2(t)$ należy przyjąć hydrostatyczne ciśnienie $g\rho h(t)$, zależne od poziomu

cieczy w zbiorniku (wysokości $h(t)$ słupa cieczy) oraz gęstości ρ tej cieczy; g oznacza przyspieszenie ziemskie. Zachodzi zatem równość $q_2(t) = k\sqrt{g\rho} \cdot \sqrt{h(t)}$. Poziom $h(t)$ wyznacza się z bilansu objętości $v(t)$ cieczy w zbiorniku. W tym celu rozważa się równanie różniczkowe $dv(t)/dt = q_1(t) - q_2(t)$ z warunkiem początkowym $v(t_0) = \bar{v}$. Pochodną $dv(t)/dt$ można wyrazić jako

$$\frac{dv(t)}{dt} = \frac{dv(h)}{dh} \cdot \frac{dh(t)}{dt}$$

gdzie $dv(h)/dh$ charakteryzuje kształt danego zbiornika (wartość tej pochodnej równa jest powierzchni przekroju poprzecznego zbiornika na wysokości h). Załóżmy, że dla rozważanego zbiornika zachodzi $dv(h)/dh = S$, gdzie przez S oznaczono powierzchnię poprzecznego przekroju niezależną od h . Na tej podstawie otrzymujemy równanie

$$S \cdot \frac{dh(t)}{dt} = q_1(t) - k\sqrt{g\rho} \cdot \sqrt{h(t)}. \quad (2.3)$$

Punkt pracy (stan równowagi) rozważanego obiektu definiują wielkości: $q_1(t_0) = \bar{q}_1$, $q_2(t_0) = \bar{q}_2$ oraz $h(t_0) = \bar{h}$, przy czym $\bar{q}_1 = \bar{q}_2 = k\sqrt{g\rho\bar{h}} \equiv \bar{q}$. Oznacza to, że dla przyrostów odpowiednich sygnałów obowiązują relacje: $q_1(t) = \bar{q}_1 + \Delta q_1(t)$, $q_2(t) = \bar{q}_2 + \Delta q_2(t)$ oraz $h(t) = \bar{h} + \Delta h(t)$. Linearyzacja równania (2.3) w otoczeniu punktu (\bar{q}, \bar{h}) przebiega w następujący sposób:

$$\begin{aligned} S \cdot \frac{d\Delta h(t)}{dt} &= \bar{q} + \Delta q_1(t) - k\sqrt{g\rho} \cdot \sqrt{\bar{h} + \Delta h(t)} \\ &\approx \bar{q} + \Delta q_1(t) - k\sqrt{g\rho\bar{h}} \cdot \left(1 + \frac{\Delta h(t)}{2\bar{h}}\right). \end{aligned}$$

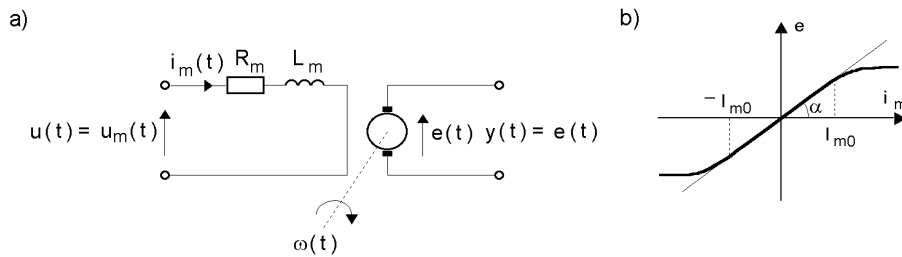
Poszukując opisu transmitancyjnego, powyższy wzór zapisujemy w postaci

$$S \cdot \frac{d\Delta h(t)}{dt} = \Delta q_1(t) - \frac{\bar{q}}{2\bar{h}} \cdot \Delta h(t)$$

prowadzącej do operatorowej relacji $T_0 s \Delta H(s) = k_0 \Delta Q_1(s) - \Delta H(s)$, gdzie $T_0 = 2\bar{h}S/\bar{q}$ oraz $k_0 = 2\bar{h}/\bar{q}$. Na tej podstawie wyznaczamy transmitancję $\Delta H(s)/\Delta Q_1(s) = k_0/(1 + T_0 s)$. Jak łatwo pokazać, dla założonego punktu pracy zachodzi równość $\Delta q_2(t) = \bar{q}\Delta h(t)/(2\bar{h}) = \Delta h(t)/k_0$, co oznacza, że $\Delta Q_2(s)/\Delta H(s) = 1/k_0$. Transmitancja $\Delta Q_2(s)/\Delta Q_1(s)$ dana jest zatem wzorem

$$\frac{\Delta Q_2(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{\Delta Q_2(s)}{\Delta H(s)} \cdot \frac{\Delta H(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{1}{1 + T_0 s}.$$

Przykład 2.1.5 Niech prądnica napędzana ze stałą prędkością kątową (rys. 2.6a) pracuje przy idealnym biegu jałowym. Zakres zmian prądu wzbudzenia $i_m(t)$ jest tego rodzaju, że punkt pracy znajduje się pomiędzy $-I_{m0}$ i $+I_{m0}$ (rys. 2.6b). W takim przypadku – pomijając wpływ histerezy obwodu magnetycznego – możemy oczekiwać, że prądnica pracuje na prostoliniowej części charakterystyki $e = f(i_m)$, gdzie e oznacza siłę elektromotoryczną prądnicy (rys. 2.6b). Wyznacz transmitancję wiążącą napięcie na zaciskach prądnicy z napięciem wzbudzenia.



Rys. 2.6. Schemat działania (a) oraz charakterystyka statyczna (b) prądnicy

Rozwiązanie Siła elektromotoryczna prądnicy $e(t)$ jest w rozważanych warunkach proporcjonalna do prądu wzbudzenia $e(t) = k_m i_m(t)$, przy czym $k_m = \tan \alpha$ (rys.2.6b). Indukcyjność obwodu wzbudzenia L_m możemy traktować jako stałą, zatem przy zasilaniu tego obwodu napięciem $u_m(t)$ obowiązuje zależność

$$R_m i_m(t) + L_m \frac{di_m(t)}{dt} = u_m(t)$$

gdzie R_m oznacza rezystancję obwodu wzbudzenia. Na tej podstawie otrzymujemy równość

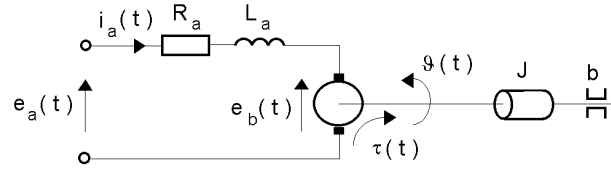
$$\frac{R_m}{k_m} e(t) + \frac{L_m}{k_m} \dot{e}(t) = u_m(t).$$

Poddając ją transformacji Laplace'a, przy zerowych warunkach początkowych, dostajemy transmitancję

$$\frac{E(s)}{U_m(s)} = \frac{k_m}{R_m(1 + \tau_m s)}$$

w której $\tau_m = L_m/R_m$ oznacza stałą czasową obwodu wzbudzenia. Prądnicę obcowzbudną można zatem modelować członem inercyjnym.

Przykład 2.1.6 Zakładając linearyzację odpowiednich charakterystyk, wyprowadź równania dynamiki obcowzbudnego silnika prądu stałego, sterowanego od strony twornika (rys. 2.7). Określ transmitancję operatorową, opisującą związek między zmianą napięcia wejściowego w obwodzie twornika a zmianą położenia kąтового wału silnika.



Rys. 2.7. Schemat silnika prądu stałego sterowanego od strony twornika

Rozwiązanie Wielkości występujące na rys. 2.7 oznaczają: $e_a(t)$ – napięcie wejściowe w obwodzie twornika, $i_a(t)$ – prąd w obwodzie twornika, $e_b(t)$ – siła przeciwelektromotoryczna, $\tau(t)$ – moment mechaniczny silnika, $\vartheta(t)$ – położenie kątowe wału silnika, J – moment bezwładności sprowadzony do wału silnika, b – współczynnik tarcia lepkiego sprowadzony do wału silnika.

Linearyzując charakterystykę statyczną $\tau(i_a)$ w otoczeniu przyjętego punktu pracy (zakłada się, że pole wzbudzenia ma wartość stałą), otrzymuje się zależność $\Delta\tau(t) = k \cdot \Delta i_a(t)$, gdzie k jest współczynnikiem nachylenia tej charakterystyki. Siła przeciwelektromotoryczna indukowana w obwodzie twornika jest proporcjonalna do prędkości kątowej, co oznacza przyjęcie modelu w postaci równości $\Delta e_b(t) = k_b \Delta \dot{\vartheta}(t)$. Współczynniki k oraz k_b stanowią indywidualne charakterystyki danego silnika. Równanie spadków napięć w obwodzie twornika ma przeto postać

$$\Delta e_a(t) = R_a \Delta i_a(t) + L_a \frac{d\Delta i_a(t)}{dt} + k_b \frac{d\Delta \vartheta(t)}{dt} \quad (2.4)$$

zaś równanie dynamiki wału można zapisać jako

$$J \frac{d^2 \Delta \vartheta(t)}{dt^2} = k \Delta i_a - b \frac{d\Delta \vartheta(t)}{dt}. \quad (2.5)$$

Przedstawiając (2.4) i (2.5) w formie operatorowej, uzyskujemy odpowiednio:

$$\begin{aligned} \Delta E_a(s) &= R_a \Delta I_a(s) + sL_a \Delta I_a(s) + sk_b \Delta \Theta(s) \\ s^2 J \Delta \Theta(s) &= k \Delta I_a(s) - sb \Delta \Theta(s). \end{aligned}$$

Na tej podstawie wyznaczamy relację

$$\Delta\Theta(s) = \frac{k}{s(b + Js)} \Delta I_a(s)$$

a następnie poszukiwaną transmitancję operatorową

$$\frac{\Delta\Theta(s)}{\Delta E_a(s)} = \frac{k}{s(kk_b + (R_a + L_a s)(b + Js))}.$$

Zlinearyzowany model rozważanego silnika jest więc modelem trzeciego rzędu. Jeżeli indukcyjność L_a w obwodzie twornika ma pomijalnie małą wartość, wówczas otrzymujemy transmitancję

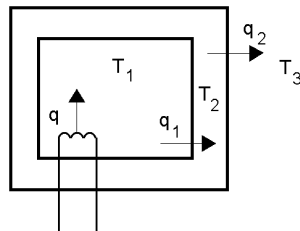
$$\frac{\Delta\Theta(s)}{\Delta E_a(s)} = \frac{k_0}{s(1 + T_0 s)} \quad (2.6)$$

gdzie

$$k_0 = \frac{k}{kk_b + bR_a} \quad \text{oraz} \quad T_0 = \frac{JR_a}{kk_b + bR_a}.$$

Wielkość T_0 określana jest mianem elektromechanicznej stałej czasowej silnika. Ze wzoru (2.6) wynika, że taki uproszczony model silnika odpowiada szeregowemu połączeniu członu całkującego oraz członu inercyjnego.

Przykład 2.1.7 Rozpatrzmy prosty zlinearyzowany model procesów wymiany ciepła, ograniczając się do opisu przybliżonego w kategoriach układów o stałych skupionych. Załóżmy zatem (zob. rys. 2.8), że w komorze termicznej znajduje się źródło strumienia energii cieplnej o wartości $q(t)$. Niech $T_1(t)$ oznacza temperaturę panującą w komorze, $T_2(t)$ – temperaturę ścian komory, zaś $T_3(t)$ – temperaturę otoczenia.



Rys. 2.8. Schematyczne przedstawienie komory termicznej

Strumień energii cieplnej przepływającej między wnętrzem komory a jej ścianami opisuje wzór

$$q_1(t) = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{R_1}$$

gdzie przez R_1 oznaczono odpowiednią rezystancję cieplną. Bilans energetyczny dla wnętrza komory ma postać równości

$$C_1 \frac{dT_1(t)}{dt} = q(t) - \frac{T_1(t) - T_2(t)}{R_1}$$

gdzie C_1 oznacza pojemność cieplną komory. Modelując proces wymiany ciepła między ścianami komory a otoczeniem, otrzymujemy równania:

$$\begin{aligned} q_2(t) &= \frac{T_2(t) - T_3(t)}{R_2} \\ C_2 \frac{dT_2(t)}{dt} &= \frac{T_1(t) - T_2(t)}{R_1} - \frac{T_2(t) - T_3(t)}{R_2} \end{aligned}$$

w których R_2 oznacza odpowiednią rezystancję cieplną, zaś C_2 jest pojemnością cieplną ścian komory. Zakładając stałe wartości parametrów R_1 i R_2 oraz C_1 i C_2 , wyznacz transmitancje operatorowe, opisujące wpływ wielkości dostarczanego strumienia energii cieplnej oraz wpływ temperatury otoczenia na temperaturę w komorze.

Rozwiązanie Z bilansu energetycznego dla wnętrza komory wynika operatorowa relacja

$$T_1(s) = \frac{R_1}{1 + R_1 C_1 s} Q(s) + \frac{1}{1 + R_1 C_1 s} T_2(s)$$

zaś z bilansu energetycznego dla ścian komory – relacja

$$T_2(s) = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} + R_1 C_2 s} T_1(s) + \frac{\frac{R_1}{R_2}}{1 + \frac{R_1}{R_2} + R_1 C_2 s} T_3(s).$$

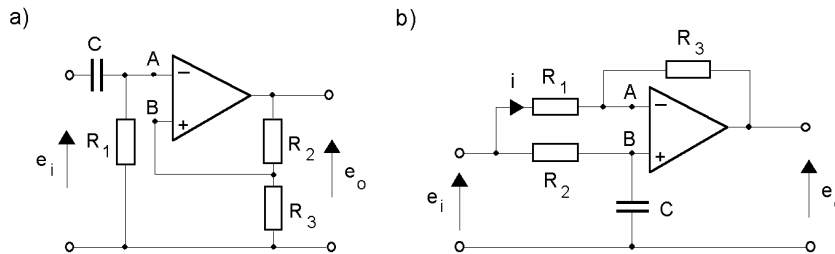
Po wykonaniu prostych przekształceń, uzyskujemy poszukiwaną zależność

$$T_1(s) = G_q(s)Q(s) + G_{T_3}(s)T_3(s)$$

przy czym transmitancje $G_q(s)$ oraz $G_{T_3}(s)$ zdefiniowane są jak następuje:

$$\begin{aligned} G_q(s) &= \frac{T_1(s)}{Q(s)} = \frac{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C_2 s}{1 + (R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2)s + R_1 C_1 R_2 C_2 s^2} \\ G_{T_3}(s) &= \frac{T_1(s)}{T_3(s)} = \frac{1}{1 + (R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2)s + R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}. \end{aligned}$$

Przykład 2.1.8 Schematy układów aplikacyjnych wzmacniacza operacyjnego dane są na rys. 2.9. Przyjmuje się idealizowany model wzmacniacza operacyjnego – co oznacza, że prądy polaryzacyjne wzmacniacza mają wartości zerowe, zaś potencjały e_A oraz e_B punktów oznaczonych odpowiednio jako A oraz B są jednakowe. Dla każdego z rozważanych przypadków (**a**, **b**) należy wyznaczyć transmitancję operatorową $E_o(s)/E_i(s)$.



Rys. 2.9. Układ wzmacniacza operacyjnego

Rozwiązanie

- a)** Z rys. 2.9a oraz przyjętych założeń wynikają następujące zależności na potencjały $E_A(s)$ oraz $E_B(s)$:

$$E_A(s) = \frac{R_1 C s}{1 + R_1 C s} E_i(s), \quad E_B(s) = \frac{R_3}{R_2 + R_3} E_o(s).$$

Uwzględniając fakt, że $E_A(s) = E_B(s)$, łatwo uzyskujemy wzór

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{R_2 + R_3}{R_3} \cdot \frac{R_1 C s}{1 + R_1 C s}.$$

- b)** Prąd $I(s)$ płynący przez rezystancje R_1 i R_3 ma wartość

$$I(s) = \frac{1}{R_1 + R_3} (E_i(s) - E_o(s))$$

zaś potencjał w punkcie B wynosi (rys. 2.9b)

$$E_B(s) = \frac{1}{1 + R_2 C s} E_i(s).$$

Potencjał w punkcie A określony jest wzorem $E_A(s) = E_i(s) - U_{R_1}(s)$, gdzie przez $U_{R_1}(s)$ oznaczono spadek napięcia na rezystancji R_1

$$U_{R_1}(s) = R_1 I(s) = \frac{R_1}{R_1 + R_3} (E_i(s) - E_o(s)).$$

Jak łatwo zauważyć, zachodzi zatem

$$E_A(s) = \frac{R_3}{R_1 + R_3} E_i(s) + \frac{R_1}{R_1 + R_3} E_o(s).$$

Z warunku $E_A(s) = E_B(s)$ wynika więc, że

$$\frac{R_3}{R_1 + R_3} E_i(s) + \frac{R_1}{R_1 + R_3} E_o(s) = \frac{1}{1 + R_2 C s} E_i(s).$$

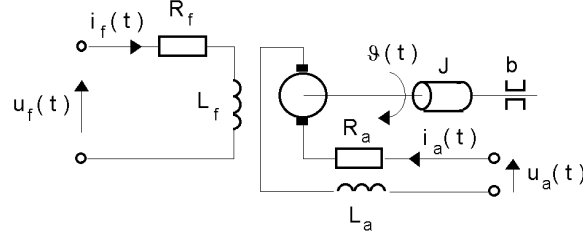
Poszukiwana transmitancja ma przeto postać

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1 - \frac{R_2 R_3}{R_1} C s}{1 + R_2 C s}.$$

Warto zauważyć, że transmitancja ta odpowiada członowi nieminimalnofazowemu; przyjmując $R_1 = R_3$, uzyskać można transmitancję układu przesuwnika fazy

$$\frac{E_o(s)}{E_i(s)} = \frac{1 - R_2 C s}{1 + R_2 C s}.$$

Przykład 2.1.9 Wyznacz operatorową transmitancję silnika prądu stałego sterowanego od strony wzbudzenia (rys. 2.10). Przyjmij, że wielkością wejściową jest zmiana napięcia wzbudzenia $u_f(t)$, zaś wielkością wyjściową stanowi zmiana kąтового położenia wału silnika $\vartheta(t)$. Obciążenie silnika opisane jest momentem bezwładności J oraz współczynnikiem tarcia lepkiego b .



Rys. 2.10. Schemat działania silnika prądu stałego sterowanego od strony wzbudzenia

Rozwiązanie Wobec przyjętych założeń, ruch wału silnika opisany jest równaniem

$$J\ddot{\vartheta}(t) = \tau(t) - b\dot{\vartheta}(t) \quad (2.7)$$

gdzie przez $\vartheta(t)$ oznaczono położenie kątowe wału, zaś $\tau(t)$ jest momentem obrotowym dostarczonym przez silnik. Moment ten zależy od strumienia wzbudzenia $\Phi_f(t)$ oraz od prądu w obwodzie twornika $i_a(t)$, co zapisujemy jako $\tau(t) = k_1\Phi_f(t)i_a(t)$. Równanie spadków napięć w obwodzie wzbudzenia ma postać

$$R_f i_f(t) + k_f \dot{\Phi}_f(t) = u_f(t)$$

zaś odpowiednie równanie dla obwodu twornika przedstawia się następująco:

$$R_a i_a(t) + k_a \dot{\Phi}_a(t) + e_b(t) = u_a(t)$$

gdzie $\dot{\Phi}_a(t)$ oznacza strumień magnetyczny tego obwodu, zaś $e_b(t)$ jest siłą przeciwelektromotoryczną. Siła ta zależy od sprzężenia magnetycznego $\Psi_m(t)$ obwodu twornika ze strumieniem wzbudzenia oraz od prędkości kątowej: $e_b(t) = k_b \Psi_m(t) \dot{\vartheta}(t)$. Zakłada się przy tym, iż napięcie $u_a(t)$ ma wartość stałą oraz że współczynniki k_1 , k_f , k_a oraz k_b , charakteryzujące dany silnik, także przyjmują stałe wartości. Linearyzacja równania obwodu wzbudzenia prowadzi do następującej operatorowej relacji:

$$(R_f + sL_f)\Delta I_f(s) = \Delta U_f(s) \quad (2.8)$$

gdzie przez L_f oznaczono indukcyjność obwodu wzbudzenia, zależną od liczby zwojów tego obwodu oraz od nominalnej wartości prądu wzbudzenia I_{f_0} , zdeterminowanej przyjętym punktem pracy (I_{f_0}, I_{a_0}) . Zakłada się bowiem, że prąd w obwodzie wzbudzenia ma postać $i_f(t) = I_{f_0} + \Delta i_f(t)$, zaś prąd w obwodzie twornika można opisać jako $i_a(t) = I_{a_0} + \Delta i_a(t)$, gdzie I_{a_0} ,

podobnie jak poprzednio, oznacza nominalną wartość tego prądu. Linearyzacja równania $\tau(t) = k_1 \Phi_f(t) i_a(t)$ w punkcie pracy pozwala na uzależnienie przyrostu momentu od dwóch zmiennych

$$\Delta T(s) = k_t(I_{f_0} \Delta I_a(s) + I_{a_0} \Delta I_f(s)) \quad (2.9)$$

gdzie k_t jest współczynnikiem charakteryzującym dany silnik. Linearyzując równanie obwodu twornika, uzyskujemy następujący wzór:

$$(R_a + sL_a) \Delta I_a(s) = -k_2(\Omega_0 \Delta I_f(s) + sI_{f_0} \Delta \Theta(s)) \quad (2.10)$$

w którym przez L_a oznaczono indukcyjność obwodu twornika (zależną między innymi od liczby zwojów tego obwodu oraz od wartości prądu i_{a_0}), Ω_0 jest prędkością kątową dla punktu pracy (I_{f_0} , I_{a_0}) silnika, zaś k_2 jest odpowiednim współczynnikiem proporcjonalności. Ze wzorów (2.7)-(2.9) otrzymuje się zależność

$$s(b + Js) \Delta \Theta(s) = k_t I_{f_0} \Delta I_a(s) + \frac{k_t I_{a_0}}{R_f + L_f s} \cdot \Delta U_f(s) \quad (2.11)$$

natomiast ze wzorów (2.8) oraz (2.10) wynika, że

$$\Delta I_a(s) = \frac{-k_2 \Omega_0}{(R_a + L_a s)(R_f + L_f s)} \cdot \Delta U_f(s) - \frac{s k_2 I_{f_0}}{R_a + L_a s} \cdot \Delta \Theta(s).$$

Uwzględniając (2.11), można na tej podstawie wyznaczyć poszukiwaną postać transmitancji operatorowej

$$\frac{\Delta \Theta(s)}{\Delta U_f(s)} = \frac{k_t(I_{a_0}(R_a + L_a s) - k_2 I_{f_0} \Omega_0)}{s((b + Js)(R_a + L_a s) + k_2 k_t I_{f_0}^2)(R_f + L_f s)}.$$

Jeżeli w punkcie pracy zachodzi $I_{f_0} = 0$, wówczas transmitancja ta przyjmuje prostszą postać

$$\frac{\Delta \Theta(s)}{\Delta U_f(s)} = \frac{k_v}{s(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}$$

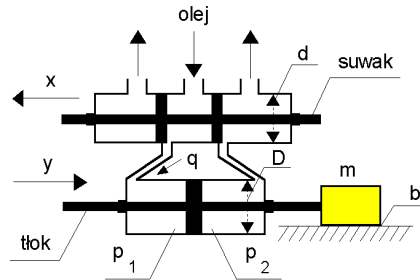
przy czym:

$$k_v = \frac{k_t}{b R_f} I_{a_0}, \quad T_1 = \frac{J}{b}, \quad T_2 = \frac{L_f}{R_f}.$$

Zauważmy ponadto, że w przypadku, w którym wpływ tarcia lepkiego można zaniedbać, transmitancja rozważanego silnika odpowiada szeregowemu połączeniu dwóch członów całkujących i członu inercyjnego:

$$\frac{\Delta \Theta(s)}{\Delta U_f(s)} = \frac{k_a}{s^2(1 + T_2 s)}, \quad k_a = \frac{k_t I_{a_0}}{J R_f}.$$

Przykład 2.1.10 Na rys. 2.11 pokazany jest uproszczony schemat siłownika hydraulicznego, w którym olej wykorzystywany jest jako ciecz robocza.



Rys. 2.11. Schemat siłownika hydraulicznego

Poszczególne symbole oznaczają: $x(t)$ – przesunięcie suwaka sterującego względem punktu równowagi $\bar{x} = 0$, $y(t)$ – przesunięcie tłoka siłownika, $q(t)$ – natężenie masowego przepływu oleju, $p_1(t)$ i $p_2(t)$ – ciśnienie oleju w odpowiednich komorach cylindra siłownika, m – masę obciążenia, b – współczynnik tarcia lepkiego hamującego ruch masy m , S – powierzchnię tłoka siłownika, ρ – gęstość oleju oraz d i D – średnice suwaka i tłoka ($D > d$). Traktując $x(t)$ jako wejście, zaś $y(t)$ jako wyjście siłownika, należy wyznaczyć jego transmitancję operatorową.

Rozwiązanie Załóżmy, że można zaniedbać bezwładność suwaka sterującego oraz tłoka siłownika, a ponadto że olej jest cieczą nieściśliwą, zaś kanały dopływowe oleju do komór cylindra siłownika mają jednakowy przekrój. W stanie równowagi zachodzi: $q(t) = \bar{q} = 0$ oraz $p_1(t) = \bar{p}_1 = p_2(t) = \bar{p}_2$. Funkcja $q = f(x, \Delta p)$ jest w ogólności funkcją nieliniową. Dokonując linearyzacji tej funkcji w punkcie odpowiadającym równowadze ($x = 0$, $\Delta p = 0$), uzyskuje się następujący wzór:

$$q(t) = k_1 x(t) - k_2 \Delta p(t), \quad (2.12)$$

w którym

$$k_1 = \left. \frac{\partial f(x, \Delta p)}{\partial x} \right|_{(0,0)} \quad \text{oraz} \quad k_2 = - \left. \frac{\partial f(x, \Delta p)}{\partial \Delta p} \right|_{(0,0)}.$$

Przyjęto przy tym, że k_1 oraz k_2 są liczbami większymi od zera. Rozważając przepływ oleju w przedziale czasu dt , można zapisać następujący wzór,

określający masę przemieszczonego oleju: $S\rho dy(t) = qdt$. Ze wzoru (2.12) uzyskujemy poniższą prostą zależność na różnicę ciśnień $\Delta p(t)$ między komorami cylindra siłownika:

$$\Delta p(t) = \frac{k_1}{k_2}x(t) - \frac{S\rho}{k_2}\dot{y}(t).$$

Wystąpienie niezerowej różnicy ciśnień $\Delta p(t)$ powoduje odpowiednie przesuwanie się tłoka siłownika – siła $f(t)$, która przykładana jest do masy m obciążenia, dana jest wzorem

$$f(t) = S\Delta p(t) = \frac{S}{k_2}(k_1x(t) - S\rho\dot{y}(t)).$$

Równanie ruchu tej masy przyjmuje zatem postać

$$m\ddot{y}(t) = -b\dot{y}(t) + \frac{S}{k_2}(k_1x(t) - S\rho\dot{y}(t))$$

z której wynika poszukiwana transmitancja operatorowa

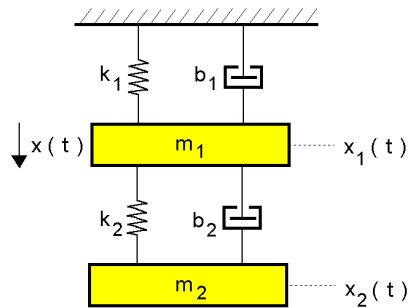
$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{k_0}{s(1 + T_0s)}$$

przy czym

$$k_0 = \frac{Sk_1}{S^2\rho + bk_2} \quad \text{oraz} \quad T_0 = \frac{mk_2}{S^2\rho + bk_2}.$$

Transmitancja ta, wiążąca transformaty przesunięcia suwaka sterującego i tłoka siłownika, odpowiada szeregowemu połączeniu członu całkującego oraz członu inercyjnego. W przypadku, w którym można pominąć wpływ masy obciążenia m , model siłownika hydraulicznego przybliża odpowiedni człon całkujący: $Y(s)/X(s) \approx k_0/s$.

Zadanie 2.1.1 Napisz równania ruchu dla układu pokazanego na rys. 2.12. Wyznacz analogowy model elektryczny tego układu mechanicznego. Zakładając, że na masę m_1 działa zewnętrzna siła $f_1(t)$, znajdź transmitancję operatorową opisującą wpływ tej siły na przesunięcie masy m_2 .



Rys. 2.12. Schemat układu mechanicznego

Odpowiedź Oznaczmy przez $x_1(t)$ oraz $x_2(t)$ przesunięcia rozważanych mas względem odpowiednich punktów równowagi. Niech ponadto k_1 oraz k_2 oznaczają współczynniki sztywności sprężyn występujących w układzie, zaś b_1 oraz b_2 – współczynniki tłumienia odpowiednich tłumików. Równania ruchu mas m_1 oraz m_2 mają postać następującą:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1(t) &= -b_1 \dot{x}_1(t) - b_2 (\dot{x}_1(t) - \dot{x}_2(t)) - k_1 x_1(t) - k_2 (x_1(t) - x_2(t)) \\ m_2 \ddot{x}_2(t) &= -b_2 (\dot{x}_2(t) - \dot{x}_1(t)) - k_2 (x_2(t) - x_1(t)). \end{aligned}$$

Równania powyższe, wraz z warunkami początkowymi $x_1(0)$, $\dot{x}_1(0)$, $x_2(0)$ oraz $\dot{x}_2(0)$, opisują zachowanie się autonomicznego układu mechanicznego, to znaczy układu, który nie podlega wymuszeniom zewnętrznym. Poszukując analogowego modelu elektrycznego, wygodnie jest skorzystać z danych zawartych w tabeli 2.1.

Tabela 2.1. Analogiczne wielkości mechaniczne i elektryczne

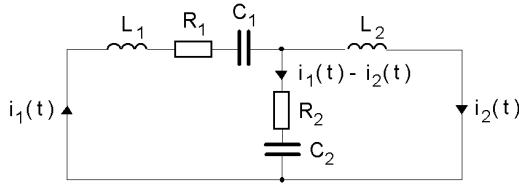
| Wielkość mechaniczna | Wielkość elektryczna Analogia: siła - napięcie | Wielkość elektryczna Analogia: siła - prąd |
|-------------------------------|---|---|
| Siła i moment siły | Napięcie | Prąd |
| Masa i moment bezwładności | Indukcyjność | Pojemność |
| Tarcie lepkie | Rezystancja | Odwrotność rezystancji |
| Sprężystość | Odwrotność pojemności | Odwrotność indukcyjności |
| Przesunięcie liniowe i kątowe | Ładunek elektryczny | Strumień magnetyczny |
| Prędkość liniowa i kątowa | Prąd | Napięcie |

Zakładając analogię typu siła-napięcie, uzyskuje się równania:

$$L_1 \ddot{q}_1(t) + R_1 \dot{q}_1(t) + R_2 (\dot{q}_1(t) - \dot{q}_2(t)) + \frac{q_1(t)}{C_1} + \frac{q_1(t) - q_2(t)}{C_2} = 0$$

$$L_2 \ddot{q}_2(t) + R_2(\dot{q}_2(t) - \dot{q}_1(t)) + \frac{q_2(t) - q_1(t)}{C_2} = 0$$

z warunkami początkowymi $q_1(0)$, $\dot{q}_1(0)$, $q_2(0)$ oraz $\dot{q}_2(0)$. Oznaczając $\dot{q}_1(t)$ jako $i_1(t)$, zaś $\dot{q}_2(t)$ jako $i_2(t)$, otrzymuje się poszukiwany schemat analogowego modelu elektrycznego przedstawiony na rys. 2.13.

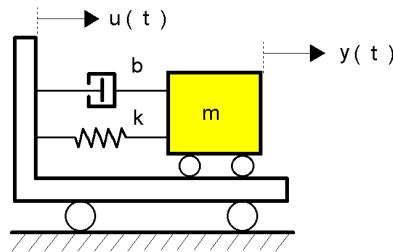


Rys. 2.13. Schemat analogowego obwodu elektrycznego

Zakładając zerowe warunki początkowe $x_1(0)$, $\dot{x}_1(0)$, $x_2(0)$ oraz $\dot{x}_2(0)$, otrzymujemy transmitancję

$$\frac{X_2(s)}{F_1(s)} = \frac{k_2 + b_2 s}{(k_1 + k_2 + (b_1 + b_2)s + m_1 s^2)(k_2 + b_2 s + m_2 s^2) - (k_2 - b_2 s)^2}$$

Zadanie 2.1.2 Określ równanie ruchu masy m w układzie pokazanym na rys. 2.14, gdzie $u(t)$ oraz $y(t)$ oznaczają przyrostowe przesunięcia liniowe.



Rys. 2.14. Schemat układu mechanicznego

Zakładając, że platforma, na której spoczywa masa m , jest nieważka, wyznacz transmitancję operatorową $Y(s)/U(s)$.

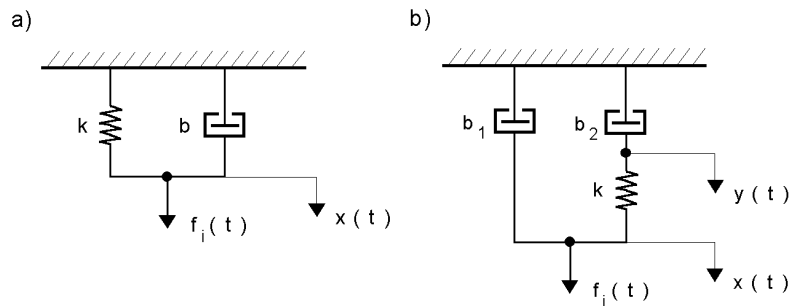
Odpowiedź Równanie ruchu ma postać

$$m\ddot{y}(t) = -b(\dot{y}(t) - \dot{u}(t)) - k(y(t) - u(t)).$$

Zerowym warunkom początkowym ($y(0), \dot{y}(0)$) odpowiada transmitancja

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{k + bs}{k + bs + ms^2}.$$

Zadanie 2.1.3 Przyjmując zlinearyzowane modele układów mechanicznych pokazane na rys. 2.15, podaj odpowiednie równania sił.



Rys. 2.15. Schematy układów mechanicznych

Traktując siłę $f_i(t)$ jako wielkością wejściową, zaś siłę reakcji sprężyny $f_o(t)$ – jako wielkość wyjściową, określ odpowiednie transmitancje operatorowe. Podaj analogiczne obwody elektryczne, wykorzystując analogię siła-napiecie.

Odpowiedź

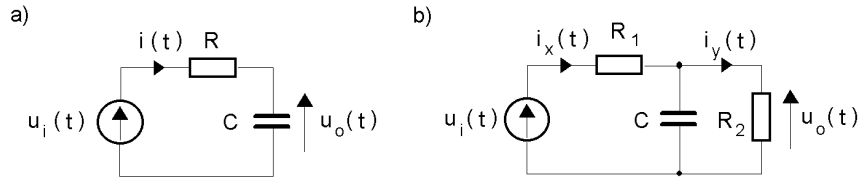
a) Równanie równowagi sił ma postać

$$f_i(t) - b\dot{x}(t) - kx(t) = 0$$

zaś poszukiwana transmitancja dana jest wzorem

$$\frac{F_o(s)}{F_i(s)} = \frac{1}{1 + T_0 s}$$

gdzie $T_0 = b/k$. Analogowy obwód elektryczny pokazano na rys. 2.16a ($u_i(t) \equiv f_i(t)$, $u_o(t) \equiv f_o(t)$, $i(t) \equiv \dot{x}(t)$, $R \equiv b$ oraz $C \equiv 1/k$).



Rys. 2.16. Schematy analogowych obwodów elektrycznych

b) Równania równowagi sił dane są wzorami:

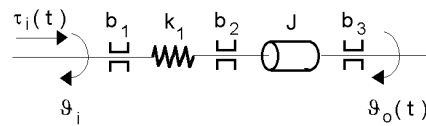
$$\begin{aligned} f_i(t) - b_1 \dot{x}(t) - k(x(t) - y(t)) &= 0 \\ -b_2 \dot{y}(t) - k(y(t) - x(t)) &= 0. \end{aligned}$$

Stosowną transmitancję określa wzór

$$\frac{F_o(s)}{F_i(s)} = \frac{k_0}{1 + T_0 s}, \quad k_0 = \frac{b_2}{b_1 + b_2}, \quad T_0 = \frac{b_1 b_2}{k(b_1 + b_2)}.$$

Analogowy obwód elektryczny pokazano na rys. 2.16b ($u_i(t) \equiv f_i(t)$, $u_o(t) \equiv f_o(t)$, $i_x(t) \equiv \dot{x}(t)$, $i_y(t) \equiv \dot{y}(t)$, $R_1 \equiv b_1$, $R_2 \equiv b_2$ oraz $C \equiv 1/k$).

Zadanie 2.1.4 Na rys. 2.17 przedstawiono model układu przeniesienia napędu, przy czym przez $\tau_i(t)$ oznaczono moment obrotowy dostarczany do układu.



Rys. 2.17. Schematyczne przedstawienie układu przeniesienia napędu

Wyznacz odpowiednie równania ruchu. Następnie, przyjmując jako wielkość wejściową prędkość kątową $\vartheta_i(t)$, zaś jako wielkość wyjściową – prędkość kątową $\vartheta_o(t)$, określ odpowiednią transmitancję operatorową. Podaj analogowe obwody elektryczne modelujące rozważany układ mechaniczny.

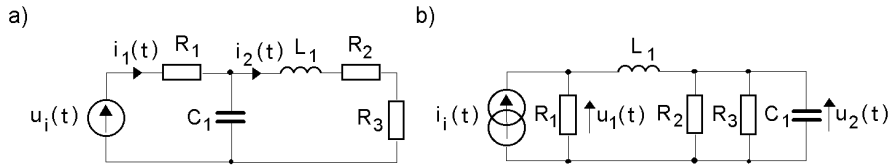
Odpowiedź Ruch rozważanego układu opisany jest równaniami:

$$\begin{aligned} J\ddot{\vartheta}_o(t) &= -k_1(\vartheta_o(t) - \vartheta_i(t)) - b_2\dot{\vartheta}_o(t) - b_3\dot{\vartheta}_o(t) \\ 0 &= \tau_i(t) - k_1(\vartheta_i(t) - \vartheta_o(t)) - b_1\dot{\vartheta}_i(t) \end{aligned}$$

z warunkami początkowymi $\vartheta_i(0)$, $\vartheta_o(0)$ oraz $\dot{\vartheta}_o(0)$. Poszukiwaną transmitancję określa wzór

$$\frac{\Theta_o(s)}{\Theta_i(s)} = \frac{1}{1 + 2\zeta\tau s + \tau^2 s^2}, \quad \tau = \sqrt{\frac{J}{k_1}}, \quad \zeta = \frac{b_1 + b_2}{2\sqrt{k_1 J}}.$$

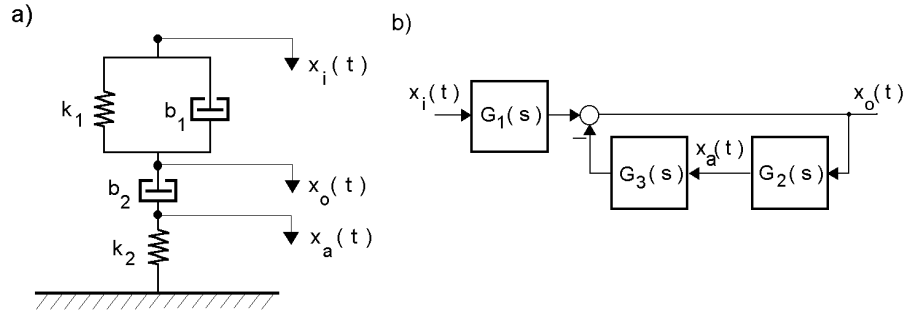
Analogowe modele elektryczne przedstawiono na rys. 2.18. W przypadku analogii typu moment siły-napięcie (rys. 2.17a) otrzymujemy następujące pary odpowiednich wielkości: $u_i(t) \equiv \tau_i(t)$, $i_1(t) \equiv \dot{\vartheta}_1(t)$, $i_2(t) \equiv \dot{\vartheta}_2(t)$, $R_1 \equiv b_1$, $R_2 \equiv b_2$, $R_3 \equiv b_3$, $C \equiv 1/k_1$ oraz $L \equiv J$. W przypadku analogii typu moment siły-prąd (rys. 2.17b) obowiązują następujące przyporządkowania: $i_i(t) \equiv \tau_i(t)$, $u_1(t) \equiv \dot{\vartheta}_1(t)$, $u_2(t) \equiv \dot{\vartheta}_2(t)$, $R_1 \equiv 1/b_1$, $R_2 \equiv 1/b_2$, $R_3 \equiv 1/b_3$, $L \equiv 1/k_1$ oraz $C \equiv J$.



Rys. 2.18. Analogowe schematy elektryczne

Zadanie 2.1.5 Podaj równanie równowagi sił dla układu mechanicznego, którego schemat pokazano na rys. 2.19a. Następnie, przyjmując zerowe warunki początkowe, wyznacz transmitancję operatorową $X_o(s)/X_i(s)$, gdzie $X_i(s)$ oraz $X_o(s)$ oznaczają transformaty Laplace'a przyrostowych przesunięć liniowych $x_i(t)$ oraz $x_o(t)$.

Wskazówka: rozważany układ posiada strukturę szeregowo-równoległą. Aby opisać oddziaływanie elementów układu składających się na fragment szeregowy tej struktury (sprężyna o sztywności k_2 oraz tłumik o współczynniku tłumienia b_2), niezbędne jest uwzględnienie przemieszczenia $x_a(t)$.



Rys. 2.19. Schemat układu mechanicznego

Odpowiedź Równania sił mają postać:

$$\begin{aligned} b_1(\dot{x}_i(t) - \dot{x}_o(t)) + k_1(x_i(t) - x_o(t)) - b_2(\dot{x}_o(t) - \dot{x}_a(t)) &= 0 \\ b_2(\dot{x}_o(t) - \dot{x}_a(t)) - k_2x_a(t) &= 0. \end{aligned}$$

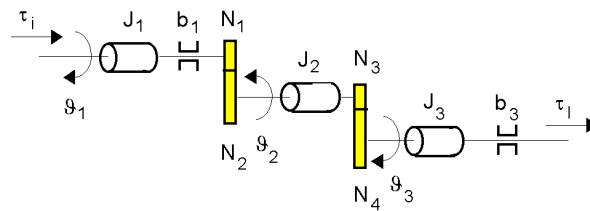
Poszukiwaną transmitancję operatorową określa wzór

$$\frac{X_o(s)}{X_i(s)} = \frac{k_1k_2 + (k_1b_2 + k_2b_1)s + b_1b_2s^2}{k_1k_2 + (k_1b_2 + k_2b_1 + k_2b_2)s + b_1b_2s^2}.$$

Strukturalny schemat układu podano na rys. 2.19b, przyjęto przy tym oznaczenia:

$$G_1(s) = \frac{k_1 + b_1s}{k_1 + (b_1 + b_2)s}, \quad G_2(s) = \frac{b_2s}{k_2 + b_2s}, \quad G_3(s) = \frac{b_2s}{k_1 + (b_1 + b_2)s}.$$

Zadanie 2.1.6 Na rys. 2.20 pokazano schemat dwustopniowej przekładni.



Rys. 2.20. Schemat dwustopniowej przekładni

Symbole występujące na tym rysunku oznaczają: τ_i – moment dostarczany do układu, τ_l – moment przekazywany do kolejnych stopni układu

(moment obciążenia), $(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3)$ – położenia kątowne poszczególnych wałów, $(N_1 : N_2, N_3 : N_4)$ – przełożenia przekładni, (J_1, J_2, J_3) – momenty bezwładności wałów, (b_1, b_3) – współczynniki tłumienia wywołanego tarciem lepkiem. Zakładając idealny charakter rozważanej przekładni, wyprowadź równanie ruchu dla wału wejściowego.

Odpowiedź Równanie ruchu wejściowego wału przekładni dane jest wzorem

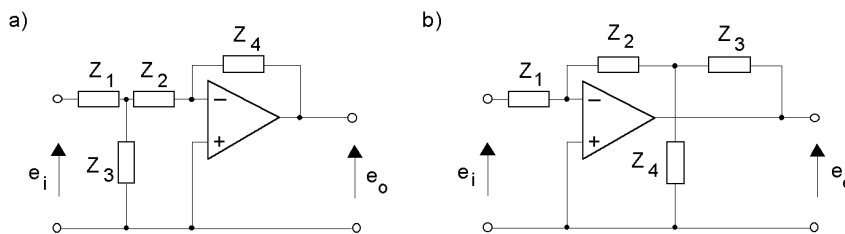
$$J_{eq}\ddot{\vartheta}_1(t) = \tau_i(t) - b_{eq}\dot{\vartheta}_1(t) - \tau_{eq}(t)$$

przy czym:

$$J_{eq} = J_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_3$$

$$b_{eq} = b_1 + \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 b_3, \quad \tau_{eq} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right) \left(\frac{N_3}{N_4}\right) \tau_l(t).$$

Zadanie 2.1.7 Przyjmując idealizowany model wzmacniacza operacyjnego, określ postać transmitancji operatorowej $E_o(s)/E_i(s)$ następujących układów z takim wzmacniaczem (rys. 2.21).



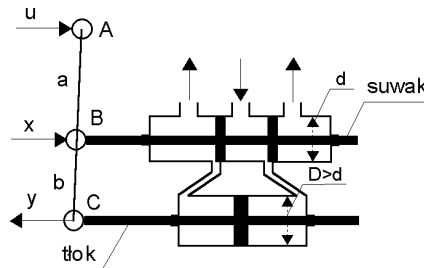
Rys. 2.21. Schemat układu ze wzmacniaczem operacyjnym

Odpowiedź Poszukiwane transmitancje operatorowe mają postać:

$$\text{a) } \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_3(s)Z_4(s)}{Z_1(s)Z_2(s) + Z_1(s)Z_3(s) + Z_2(s)Z_3(s)}$$

$$\text{b) } \frac{E_o(s)}{E_i(s)} = -\frac{Z_2(s)Z_3(s) + Z_2(s)Z_4(s) + Z_3(s)Z_4(s)}{Z_1(s)Z_4(s)}.$$

Zadanie 2.1.8 Rozważmy działanie nieobciążonego siłownika hydraulicznego, pracującego w następującym układzie z ujemnym sprzężeniem zwrotnym (rys. 2.22). Suwak sterujący oraz tłok siłownika połączone są za pomocą nieważkiej i idealnie sztywnej dźwigni swobodnej, której ramiona mają długość odpowiednio a oraz b . Dźwignia ta umożliwia sprzężenie przesunięcia tłoka siłownika z przesunięciem suwaka sterującego. Ruch suwaka można także uzyskać w sposób 'niezależny', wymuszając przesunięcie punktu A . Rozważając odpowiednio małe przesunięcia, wyznacz transmitancję operatorową $Y(s)/U(s)$. Jak powinny być dobrane parametry rozważanego układu, by można było uważać go za człon bezinercyjny?



Rys. 2.22. Układ siłownika hydraulicznego

Odpowiedź Traktując przemieszczenia $u(t)$ oraz $y(t)$ końców A i C dźwigni swobodnej jako sygnały wejściowe, zaś przemieszczenie $x(t)$ punktu B tej dźwigni – jako sygnał wyjściowy, dla małych wartości tych przemieszczeń zapisać można następujący model:

$$x(t) = \frac{b}{a+b}u(t) - \frac{a}{a+b}y(t).$$

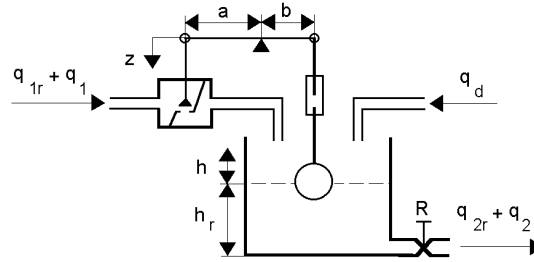
Poszukiwana transmitancja operatorowa ma zatem postać

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{\frac{b}{a}}{1 + \frac{a+b}{ak_0}s}$$

gdzie k_0 jest stałą zależną od parametrów układu (por. przykład 2.1.10). Jeżeli zachodzi $(a+b)/(ak_0) \ll 1$, wtedy uzyskuje się człon bezinercyjny o charakterystyce zależnej tylko od parametrów dźwigni: $Y(s)/U(s) \approx b/a$.

2.2 Modelowanie prostych układów regulacji

Przykład 2.2.1 Na rys. 2.23 pokazany jest przykład prostego hydraulicznego układu regulacji, służącego stabilizacji poziomu cieczy w zbiorniku przepływowym, przy wahaniami strumienia zasilającego.



Rys. 2.23. Schemat działania układu stabilizacji poziomu cieczy

Sterowania poziomem cieczy dokonuje się poprzez pływak, połączony śrubą nastawczą i mechanizmem dźwigniowym z zaworem na dopływie cieczy. Niech q_{1r} , q_{2r} i h_r oznaczają wartości strumienia wpływającego, strumienia wypływającego oraz poziomu cieczy w zbiorniku w stanie równowagi. Niech $q_1(t)$, $q_2(t)$ i $h(t)$ oznaczają odpowiednio małe zmiany tych wielkości względem stanu równowagi, zaś $q_d(t)$ niech reprezentuje zakłócenia przepływu w strumieniu dopływającym. Wyznacz zlinearyzowany model tego układu.

Rozwiązanie Dla małych zaburzeń można przyjąć, że $z(t)$ – zmiana położenia zaworu przepływowego wynosi $z(t) = ah(t)/b$, podczas gdy $q_1(t) = -c_1 z(t)$, gdzie $c_1 > 0$. Znak minus w powyższym wzorze wskazuje na to, że kiedy $z(t)$ rośnie, odpowiedni przepływ maleje, i na odwrót. Równanie bilansu strumieni ma postać

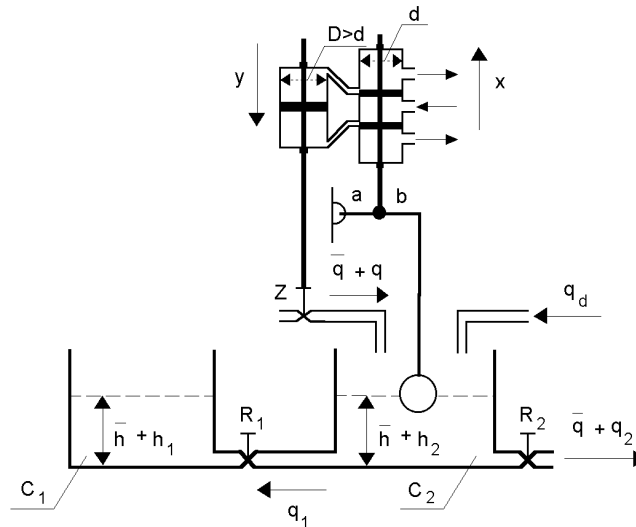
$$A \frac{dh(t)}{dt} = q_1(t) + q_d(t) - q_2(t)$$

gdzie A jest powierzchnią przekroju poprzecznego zbiornika. Ponieważ $q_2(t) = \rho g h(t)/R_h$, gdzie R_h jest rezystancją hydrauliczną otworu wylotowego, definiując $\tau_h = AR_h/(\rho g)$, ostatecznie otrzymujemy równanie

$$\frac{\rho g}{R_h} \cdot \left(h(t) + \tau_h \frac{dh(t)}{dt} \right) = q_1(t) + q_d(t)$$

będące poszukiwanym modelem zlinearyzowanego układu.

Przykład 2.2.2 Na rys. 2.24 pokazany jest schemat pewnego układu stabilizacji poziomu cieczy.



Rys. 2.24. Schemat układu stabilizacji poziomu cieczy

Obiekt regulacji składa się z dwóch zbiorników, z których pierwszy ma pojemność C_1 , zaś drugi – C_2 . Pływakowy czujnik poziomu cieczy w drugim zbiorniku za pośrednictwem dźwigni oddziałuje na położenie suwaka sterującego siłownika hydraulicznego. Przemieszczenie tłoka tego siłownika powoduje zmianę położenia zaworu Z , sterującego wielkością strumienia cieczy dopływającej do drugiego zbiornika. Zakłada się, że w rozpatrywanym układzie regulacji występuje zakłócenie w postaci strumienia $q_d(t)$ (zob. rys. 2.24). Przyjmując zlinearyzowane (idealne) modele elementów tworzących ten układ, podaj jego schemat strukturalny.

Rozwiązanie Na wstępie należy określić model sterowanego obiektu. W stanie ustalonym do drugiego zbiornika dopływa oraz z niego wypływa strumień cieczy o wartości \bar{q} – czemu odpowiada ten sam poziom cieczy \bar{h} w obu zbiornikach. Oznaczmy przez $Q(s)$ oraz $Q_d(s)$ transformaty Laplace'a zaburzeń strumieni wejściowych (dopływających) $q(t)$ oraz $q_d(t)$, przez $H_1(s)$ oraz $H_2(s)$ – transformaty Laplace'a zaburzeń poziomów cieczy w pierwszym ($h_1(t)$) oraz drugim ($h_2(t)$) zbiorniku, zaś przez $Q_2(s)$ – transformatę Laplace'a zaburzenia $q_2(t)$ strumienia wyjściowego (wypływającego). Dla pierwszego zbiornika obowiązuje równanie

$$C_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t)$$

przy czym wyróżniony kierunek przepływu cieczy zaznaczono na rys. 2.24. Dla drugiego zbiornika mamy równanie

$$C_2 \frac{dh_2(t)}{dt} = q(t) - q_1(t) - q_2(t)$$

odpowiadające modelowi nominalnemu, w którym zakłada się, że $q_d(t) = 0$. Natężenie przepływu cieczy między zbiornikami opisuje równanie

$$\frac{h_2(t) - h_1(t)}{R_1} = q_1(t)$$

zaś natężenie wypływu cieczy z drugiego zbiornika dane jest wzorem

$$\frac{h_2(t)}{R_2} = q_2(t)$$

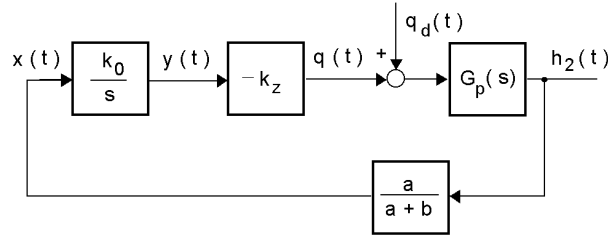
w którym przez R_1 oraz R_2 oznaczono hydrauliczne rezystancje odpowiednich zaworów. Na podstawie powyższych wzorów łatwo jest wyznaczyć następującą transmitancję operatorową rozważanego obiektu sterowania:

$$G_p(s) = \frac{H_2(s)}{Q(s)} = \frac{(1 + R_1 C_1 s) R_2}{1 + (R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2) s + R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}.$$

Ponieważ zaburzenie $Q_d(s)$ oddziałuje na wejście tego obiektu, zatem operatorowa transmitancja $H_2(s)/Q_d(s)$ ma taką samą postać. Zaburzenie poziomu $h_2(t)$ za pośrednictwem dźwigni przenosi się na zmianę położenia $x(t)$ suwaka sterującego siłownikiem hydraulicznego, zgodnie ze wzorem

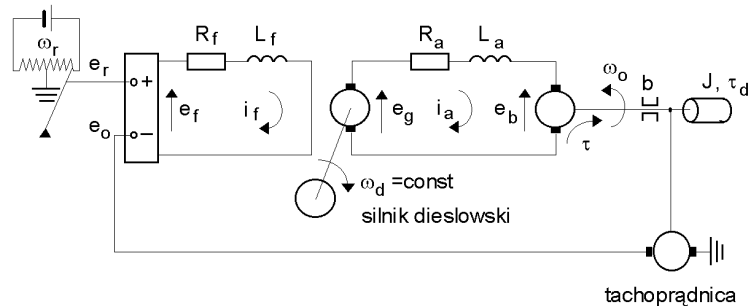
$$x(t) = \frac{a}{a+b} h_2(t).$$

Zmianie tej towarzyszy odpowiednie przesunięcie $y(t)$ tłoka tego siłownika. Na podstawie wyników z *przykładu 2.1.10* można bowiem zapisać równość $Y(s) = X(s) \cdot k_0/s$, gdzie $X(s)$ oraz $Y(s)$ oznaczają transformaty Laplace'a odpowiednich przesunięć, zaś k_0 jest współczynnikiem charakteryzującym dany siłownik. Traktując zawór Z jako człon proporcjonalny (por. *przykład 2.1.2*), uzyskuje się zależność $q(t) = -k_z y(t)$, przy czym k_z oznacza współczynnik proporcjonalności, zaś występujący tu znak minus odpowiada takiej 'polaryzacji' zaworu, przy której wzrost poziomu cieczy w drugim zbiorniku wywołuje zmniejszenie strumienia dopływającej doń cieczy – co odpowiada ujemnemu sprzężeniu zwrotnemu. Strukturalny schemat rozważanego układu stabilizacji poziomu cieczy ma zatem postać jak na rys. 2.25.



Rys. 2.25. Strukturalny schemat układu stabilizacji poziomu cieczy

Przykład 2.2.3 Rozważmy przedstawiony na rys. 2.26 schemat sterowania prędkością lokomotywy spalinowej z silnikiem dieslowskim. Sprawność takiego silnika w istotnym stopniu zależy od jego prędkości kątowej – odpowiedni punkt pracy należy zatem wybierać dla takiej prędkości $\omega_d = const$, dla której sprawność ta osiąga maksimum. W rozważanym układzie silnik dieslowski napędza prądnicę, zasilającą silnik elektryczny prądu stałego (silnik taki pracuje efektywnie w szerokim zakresie prędkości kątowych) – zadaniem tego ostatniego jest poruszanie lokomotywy. Należy określić schemat strukturalny rozważanego układu sterowania.



Rys. 2.26. Schemat działania układu sterowania prędkością lokomotywy spalinowej

Rozwiązanie Potencjometr wielkości zadanej pozwala na uzyskanie napięcia odniesienia $e_r(t)$ proporcjonalnego do zadanej prędkości kątowej $\omega_r(t)$ silnika prądu stałego: $e_r(t) = c_1 \omega_r(t)$, wielkością sterowaną jest bowiem prędkość kątowa $\omega_o(t)$ tego silnika. Tachoprądnica umieszczona na wale silnika dostarcza napięcia $e_o(t)$ proporcjonalnego do $\omega_o(t)$, co zapisujemy jako: $e_o(t) = c_2 \omega_o(t)$. Napięcie różnicowe $e_r(t) - e_o(t)$ podawane jest na wzmacniacz mocy, o wyjściowym napięciu $e_f(t)$ zgodnym ze wzorem

$e_f(t) = k_a(e_r(t) - e_o(t))$. Napięcie to wpływa na wartość prądu $i_f(t)$ w obwodzie wzbudzenia prądnicy, zgodnie z równaniem

$$R_f i_f(t) + L_f \frac{di_f(t)}{dt} = e_f(t).$$

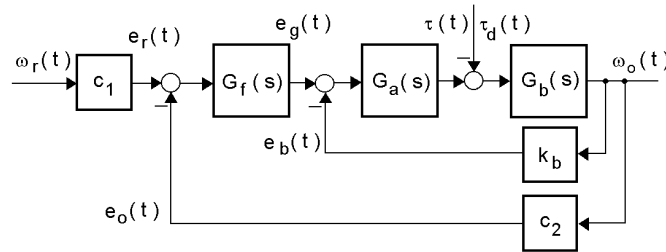
Zakładając zlinearyzowany model takiej prądnicy (por. *przykład 2.1.5*), można przyjąć, że napięcie $e_g(t)$ generowane na jej zaciskach wyjściowych dane jest wzorem $e_g(t) = k_g i_f(t)$, przy czym współczynnik k_g jest proporcjonalny do prędkości kątowej ω_d silnika dieslowskiego. Zlinearyzowane równanie obwodu twornika obcowzbudnego silnika prądu stałego (por. *przykład 2.1.6*) zapisujemy jako

$$R_a i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} = e_g(t) - e_b(t)$$

gdzie przez $i_a(t)$ oznaczono prąd w obwodzie twornika, zaś przez $e_b(t)$ – siłę przeciwelektromotoryczną indukowaną w tym obwodzie; zachodzi przy tym $e_b(t) = k_b \omega_o(t)$. Moment obrotowy $\tau(t)$ dostarczany przez silnik prądu stałego, $\tau(t) = k_t i_a(t)$, służy do pokonywania bezwładności obciążenia J , tarcia lepkiego b oraz zakłóceń $\tau_d(t)$. Odpowiednie równanie ruchu ma w tym przypadku postać następującą:

$$J \frac{d\omega_o(t)}{dt} = \tau(t) - b\omega_o(t) - \tau_d(t).$$

Korzystając z powyższych zależności, łatwo można uzyskać strukturalny schemat rozważanego układu regulacji prędkości kątowej – rys. 2.27.



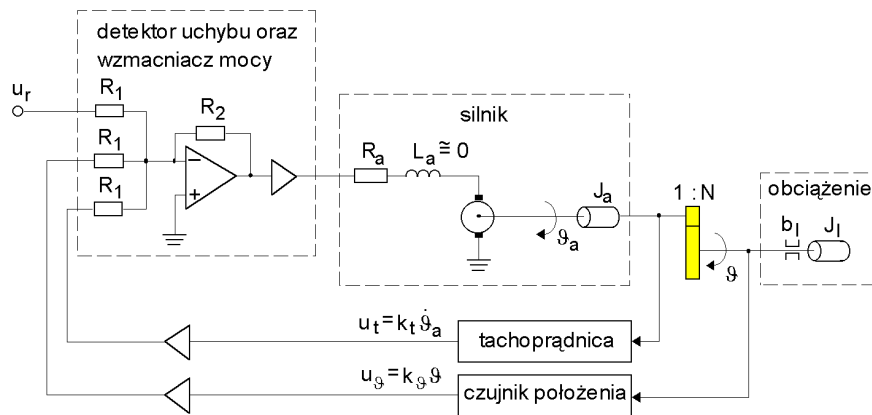
Rys. 2.27. Strukturalny schemat układu regulacji prędkości kątowej

Przyjęto następujące oznaczenia transmitancji operatorowych:

$$G_f(s) = \frac{k_a k_g}{R_f(1 + T_f s)}, \quad G_a(s) = \frac{k_t}{R_a(1 + T_a s)}, \quad G_b(s) = \frac{1}{b(1 + T_b s)}$$

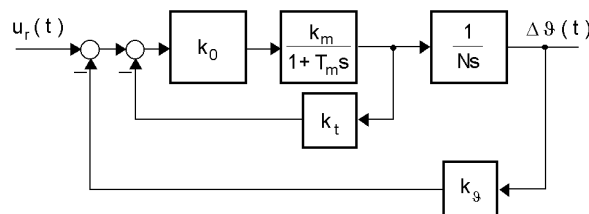
oraz stałych czasowych: $T_f = L_f/R_f$, $T_a = L_a/R_a$, $T_b = J/b$.

Zadanie 2.2.1 Na rys. 2.28 przedstawiono schemat działania układu sterowania obcowzbudnym silnikiem prądu stałego. Ruch pierwotnego wału o bezwładności J_a poprzez przekładnię $1 : N$ przekazywany jest na wał wyjściowy, którego własności dynamiczne opisane są momentem bezwładności J_l oraz współczynnikiem tarcia lepkiego b_l . Na wale pierwotnym umieszczony jest czujnik prędkości kątowej (tachoprądnica), dostarczający napięcia proporcjonalnego do tej prędkości: $u_t(t) = k_t \dot{\vartheta}_a(t)$. Czujnik położenia wału wyjściowego dostarcza napięcia proporcjonalnego do tego położenia: $u_\vartheta(t) = k_\vartheta \vartheta(t)$. Wielkością wyjściową jest zmiana $\Delta u_r(t)$ napięcia zadającego $u_r(t)$, wielkością wyjściową – zmiana $\Delta \vartheta(t)$ położenia kątowego $\vartheta(t)$. Określ strukturalny schemat takiego układu sterowania.



Rys. 2.28. Schemat układu sterowania silnikiem prądu stałego

Odpowiedź Strukturalny schemat rozważanego układu sterowania dany jest na rys. 2.29.



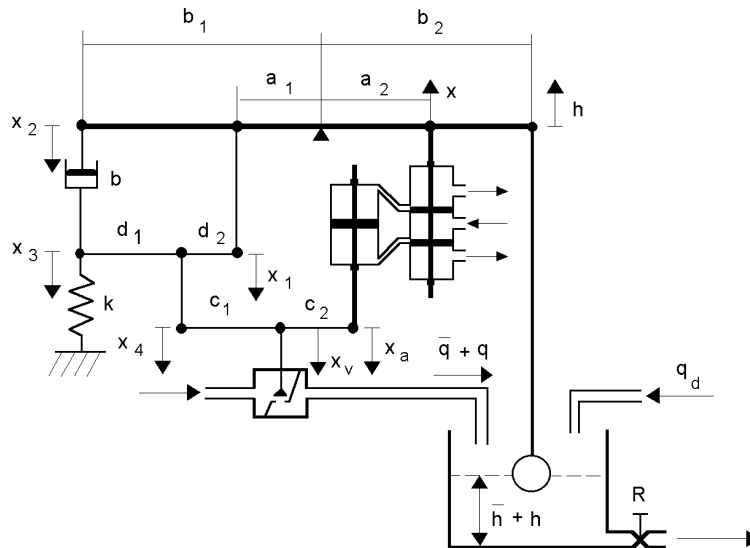
Rys. 2.29. Strukturalny schemat układu sterowania silnikiem prądu stałego

Zachodzi przy tym:

$$k_0 = \frac{R_2}{R_1}, \quad k_m = \frac{k}{kk_b + R_a b_{eq}}, \quad T_m = \frac{R_a J_{eq}}{kk_b + R_a b_{eq}}$$

gdzie $J_{eq} = J_a + J_l/N^2$ oraz $b_{eq} = b_l/N^2$. Współczynniki k oraz k_b opisują zlinearyzowany model silnika (por. *przykład 2.1.6*). Zgodnie z założeniem przyjętym na rys. 2.28, pominięto indukcyjność obwodu twornika.

Zadanie 2.2.2 Schemat ideowy pewnego układu stabilizacji poziomu cieczy w zbiorniku pokazany jest na rys. 2.30.



Rys. 2.30. Schemat ideowy układu stabilizacji poziomu cieczy

Określ schemat strukturalny tego układu, będący jego uproszczonym zlinearyzowanym modelem. Przed przystąpieniem do rozwiązywania zadania należy zapoznać się z *przykładami: 2.1.2* (zawór), *2.1.4* (zbiornik) oraz *2.1.10* (siłownik hydrauliczny). Wszystkie zmienne wielkości występujące w powyższym schemacie (liniowe przemieszczenia oraz strumień $q(t)$) odnoszą się do punktu równowagi, wyznaczonego wartością strumienia \bar{q} lub poziomem cieczy \bar{h} . Strumień $q_d(t)$ modeluje niemierzalne zakłócenia. Wielkością regulowaną jest poziom $h(t)$ cieczy w zbiorniku, zatem w zadaniu stabilizacji tego poziomu należy przyjąć zerową wielkość zadaną $h_r(t)$.

Odpowiedź Transmitancja regulatora ma postać

$$G_c(s) = \frac{X_v(s)}{H(s)} = k_c + \frac{k_i}{s} + \frac{k_d s}{1 + \tau s}$$

przy czym

$$k_c = \frac{a_1 c_2 d_1}{b_2 (c_1 + c_2) (d_1 + d_2)}, \quad k_i = \frac{k_a a_2 c_1}{b_2 (c_1 + c_2)}$$

$$k_d = \frac{b_1 c_2 d_2 \tau}{b_2 (c_1 + c_2) (d_1 + d_2)}, \quad \tau = \frac{b}{k}$$

zaś współczynnik k_a charakteryzuje dynamikę siłownika hydraulicznego

$$\frac{X_a(s)}{X(s)} = \frac{k_a}{s}$$

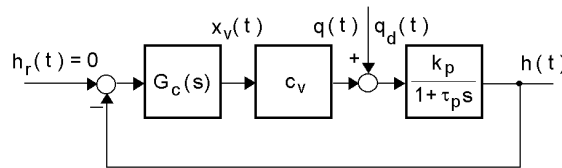
(pominięto wpływ bezwładności ruchomych części zaworu – por. *przykład 2.1.10*). Jak widać, mamy tu do czynienia z regulatorem proporcjonalno-całkująco-różniczkującym (*PID*). Zawór przedstawiono jako człon bezinercyjny

$$\frac{Q(s)}{X_v(s)} = -c_v$$

a zbiornik – jako człon inercyjny modelowany transmitancją

$$\frac{H(s)}{Q(s)} = \frac{k_p}{1 + \tau_p s}$$

Wyjaśnienia znaczenia symboli k_p oraz τ_p należy szukać w *przykładzie 2.1.4*. Schemat strukturalny tego układu regulacji dany jest na rys. 2.31.



Rys. 2.31. Strukturalny schemat układu stabilizacji poziomu cieczy

Rozdział 3

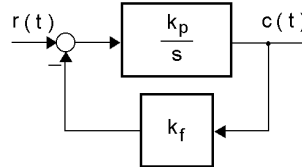
Czasowe i częstotliwościowe charakterystyki układów dynamicznych

W rozdziale tym zajmujemy się typowymi czasowymi oraz częstotliwościowymi charakterystykami układów dynamicznych opisanych operatorowymi transmitancjami. W pierwszej kolejności rozważane są charakterystyki układów inercyjnych pierwszego rzędu. Dotyczy to przede wszystkim odpowiedzi skokowych takich układów. Następnie rozpatrujemy odpowiedzi skokowe oraz charakterystyki częstotliwościowe (amplitudowe i fazowe) członów dynamicznych modelowanych standardowymi transmitancjami drugiego rzędu. Rozdział zakończono analizą odpowiednich charakterystyk układów dynamicznych o wyższym rzędzie, a także układów nieminimalnofazowych. Prezentowane w tym rozdziale przykłady oraz zadania do samodzielnego rozwiązania mają w wielu przypadkach charakter nietrudnych problemów związanych z syntezą prostych układów regulacji.

3.1 Układy pierwszego rzędu

Przykład 3.1.1 Obiekt dynamiczny całkujący o operatorowej transmitancji $G_p(s) = k_p/s$, $k_p > 0$, objęto pętlą proporcjonalnego ujemnego sprzężenia zwrotnego poprzez tor o wzmacnieniu $k_f > 0$. Wyznacz operatorową transmitancję otrzymanego układu zamkniętego (rys. 3.1), wyrażając ją za pomocą statycznego wzmacnienia k i stałej czasowej T . Zakładając, że do wejścia rozpatrywanego układu przyłożono sygnały: \mathbf{a} – jednostkowego skoku położeniowego oraz \mathbf{b} – jednostkowego skoku prędkościowego, podaj

przebieg odpowiedzi na każde z tych pobudzeń. Następnie, definiując uchyb $e(t)$ jako różnicę pomiędzy wejściowym a wyjściowym sygnałem rozpatrywanego układu, znajdź wartość końcową tego uchybu, wyrażając ją jako funkcję wyróżnionych wyżej parametrów k i T .



Rys. 3.1. Strukturalny schemat układu dynamicznego

Rozwiązanie Operatorowa transmitancja rozpatrywanego układu wyraża się wzorem

$$G(s) = \frac{\frac{k_p}{s}}{1 + \frac{k_p k_f}{s}} = \frac{k_p}{s + k_p k_f}. \quad (3.1)$$

Zapisując tę transmitancję jako

$$G(s) = \frac{k}{1 + Ts}$$

gdzie k oznacza statyczne wzmocnienie układu zamkniętego, zaś T jest stałą czasową tego układu, mamy: $k = 1/k_f$ oraz $T = 1/(k_p k_f)$. Dla wejściowego sygnału $r(t)$ w postaci jednostkowego skoku $1(t)$ odpowiedź układu (3.1) opisana jest wzorem

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)R(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k}{s(1 + Ts)}\right) = k(1 - e^{-t/T}) \cdot 1(t)$$

zaś jej znormalizowany przebieg dany jest w *dodatku 2*. Zauważmy, że wzmocnienie obiektu k_p nie wpływa na końcową wartość tej odpowiedzi. Dla sygnału $r(t)$ modelowanego jednostkowym skokiem prędkościowym $t \cdot 1(t)$ otrzymujemy

$$c(t) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)R(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k}{s^2(1 + Ts)}\right) = k((t - T) + Te^{-t/T}) \cdot 1(t).$$

Wyznamy teraz końcową wartość uchybu $e(t) = r(t) - c(t)$ w każdym z rozważanych wyżej przypadków. W pierwszym przypadku (a) – dla jednostkowego skoku położeniowego jako wejścia – końcowa wartość uchybu jest

wartością skończoną. Wartość tę możemy obliczyć na podstawie transformaty uchybu

$$E(s) = \frac{1}{s} - \frac{k}{s(1+Ts)} = \frac{1-k+sT}{s(1+Ts)}.$$

Otrzymujemy zatem $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0}(sE(s)) = 1 - k$. Rozpatrywany układ nie wprowadza uchybu końcowego tylko wtedy, gdy $k = 1$ (co odpowiada zastosowaniu jednostkowego sprzężenia zwrotnego).

W drugim przypadku (**b**) – dla pobudzenia w postaci jednostkowego skoku prędkościowego – zachodzi

$$e(t) = t - k((t - T) + Te^{-t/T}) \cdot 1(t) = ((1 - k)t + kT - kTe^{-t/T}) \cdot 1(t).$$

Jak widać, jeżeli $k \neq 1$, uchyb $e(t)$ narasta nieograniczenie w miarę upływu czasu. Natomiast w przypadku, w którym $k = 1$, wartość końcowa $e(\infty)$ uchybu $e(t)$ istnieje. Korzystając z twierdzenia o wartości końcowej oryginału, obliczamy najpierw

$$E(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s^2(1+Ts)} = \frac{T}{s(1+Ts)}$$

a następnie $e(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0}(sE(s)) = T$.

Przykład 3.1.2 Obiekt dynamiczny całkujący o operatorowej transmitancji $G_p(s) = k_p/s$, $k_p > 0$, objęto pętlą proporcjonalnego ujemnego sprzężenia zwrotnego poprzez tor o wzmacnieniu $k_f > 0$ (rys. 3.1 z przykładu 3.1.1). Wyznacz widmową transmitancję $G(j\omega)$ układu zamkniętego. Zbadaj zależność trzydecybelowego pasma przenoszenia tego układu ω_{3dB} od k_f . Niech $\omega_{3dB} = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, zaś dla $\omega = 0.1 \cdot \omega_{3dB}$ zachodzi $|G(j\omega)|_{dB} \approx 20 \text{ dB}$. Oszacuj na tej podstawie wartości parametrów k_p oraz k_f .

Rozwiązanie Operatorowa transmitancja rozważanego układu zamkniętego dana jest wzorem

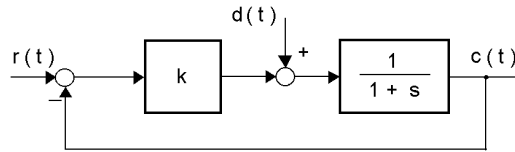
$$G(s) = \frac{k}{1+Ts}, \quad k = \frac{1}{k_f}, \quad T = \frac{1}{k_p k_f}. \quad (3.2)$$

A zatem widmowa transmitancja tego układu ma postać

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega} = \frac{k}{1+j\omega T} = \frac{k}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \cdot e^{-j \arctan(\omega T)}.$$

Z wyrażenia opisującego moduł tej transmitancji wynika, że pasmo przenoszenia równa się $\omega_{3dB} = 1/T$, a zatem ze wzoru (3.2) otrzymujemy $\omega_{3dB} = k_p k_f$. Jak widzimy, jest to wielkość proporcjonalna do wzmocnienia toru sprzężenia zwrotnego. Z kolei, na podstawie wzoru (3.2) wnioskujemy, iż dla $\omega = 0.1 \cdot \omega_{3dB}$ można przyjąć, że $|G(j\omega)| \approx k$. Dla założonych danych liczbowych mamy zatem $k_f = 1/k \approx 0.1$, a następnie $k_p = \omega_{3dB}/k_f \approx 100$.

Przykład 3.1.3 Obiekt sterowania, będący członem inercyjnym pierwszego rzędu, sterowany jest za pomocą proporcjonalnego regulatora w układzie, którego schemat przedstawia się jak na rys. 3.2. Zakładając, iż $r(t) = 0, \forall t$, oraz przyjmując, że do sygnału sterującego obiektem dodaje się zakłócenie $d(t) = \delta(t)$, zbadaj wpływ tego zakłócenia na wielkość sterowaną $c(t)$.



Rys. 3.2. Strukturalny schemat układu sterowania

Rozwiązanie Zapiszmy zakłóceniovą transmitancję rozważanego układu zamkniętego. Mamy

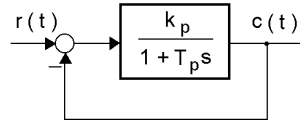
$$\frac{C(s)}{D(s)} = \frac{1}{(1+k) + s}.$$

Dla założonego zakłócenia $D(s) = \mathcal{L}(\delta(t)) = 1$ wyznaczamy transformatę wielkości sterowanej

$$C(s) = \frac{1}{(1+k) + s}$$

a następnie, po obliczeniu odwrotnej transformaty Laplace'a, otrzymujemy $c(t) = e^{-(1+k)t} \cdot 1(t)$. Widzimy zatem, że powiększając wzmocnienie k regulatora, powodujemy zwiększenie szybkości zaniku zakłócenioviej odpowiedzi impulsowej tego układu.

Zadanie 3.1.1 Schemat pewnego zamkniętego układu dynamicznego dany jest na rys. 3.3. Odpowiedź tego układu na jednostkowy skok położeniowy osiąga po upływie 1s wartość równą 0.63 wartości ustalonej, która wynosi 0.9. Wyznacz na tej podstawie wartości parametrów k_p oraz T_p .



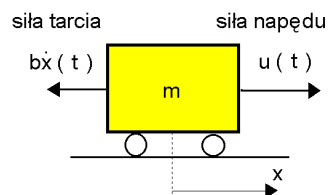
Rys. 3.3. Strukturalny schemat układu dynamicznego

Odpowiedź Parametry obiektu wynoszą: $k_p = 9$ oraz $T_p = 10$ s.

Zadanie 3.1.2 Dany jest układ zamknięty o strukturalnym schemacie jak na rys. 3.3. Zidentyfikuj człon dynamiczny w głównym kanale tego układu, jeżeli wiadomo, że dla wymuszenia harmonicznego o pulsacji $\omega = 0.1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ przesunięcie fazowe wprowadzane przez układ zamknięty równa się $-\pi/4$, zaś wzmocnienie tego układu wynosi 0.5.

Odpowiedź Rozważany człon dynamiczny opisany jest parametrami: $k_p \approx 2.414$ oraz $T_p \approx 34.14$ s.

Zadanie 3.1.3 Na pojazd o masie $m = 1000$ kg oddziałują dwie siły (zob. rys. 3.4): siła napędu $u(t) = 200 \cdot 1(t)$ N oraz siła lepkiego tarcia o współczynniku $b = 50 \text{ N} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-1}$. Jaką maksymalną prędkość v_{\max} uzyska ów pojazd przy założeniu zerowej prędkości początkowej $v(0) = 0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$? Po jakim czasie od chwili przyłożenia siły $u(t)$ pojazd uzyska tę prędkość? Przyjmuje się, że moment, w którym prędkość osiąga wartość 95% stanu ustalonego traktowany jest jako zakończenie fazy rozpędzania rozważanego pojazdu.



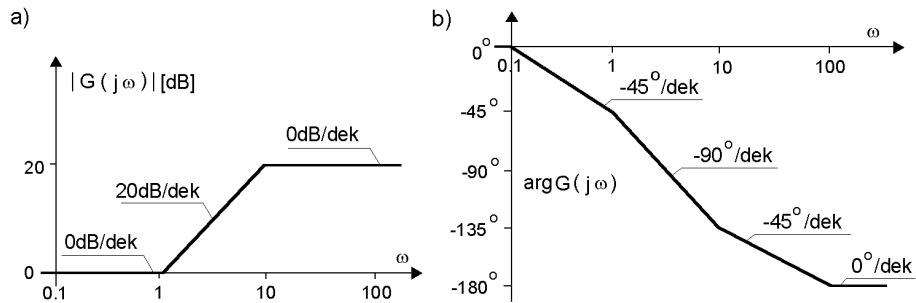
Rys. 3.4. Model sterowania pojazdem mechanicznym

Odpowiedź Pojazd osiągnie maksymalną prędkość $v_{\max} = 4 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ po 59.9 s od chwili włączenia napędu.

Zadanie 3.1.4 Wykreśl asymptotyczne charakterystyki Bodego obiektu opisanego operatorową transmitancją daną wzorem

$$G(s) = \frac{1-s}{1+0.1s}.$$

Rozwiązanie Asymptotyczne charakterystyki Bodego rozważanego obiektu dane są na rys. 3.5a,b.



Rys. 3.5. Charakterystyki Bodego nieminimalnofazowego obiektu dynamicznego

Zadanie 3.1.5 Wyznacz charakterystykę częstotliwościową danej transmitancji:

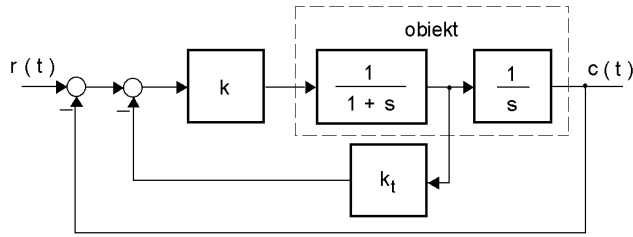
$$\text{a) } \frac{1}{s-1}, \quad \text{b) } \frac{s-1}{s+1}.$$

Odpowiedź

$$\text{a) } \frac{1}{s-1} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \cdot e^{-\pi + \arctan \omega}, \quad \text{b) } \frac{s-1}{s+1} = 1 \cdot e^{\pi - 2 \arctan \omega}.$$

3.2 Układy drugiego rzędu

Przykład 3.2.1 Dany jest strukturalny schemat (rys. 3.6) dwupętlowego układu sterowania, będącego serwowotorem prądu stałego z proporcjonalnym regulatorem oraz prędkościowym korekcyjnym sprzężeniem zwrotnym. Znajdź wartości nastaw k oraz k_t , zapewniające odpowiedzi skokowej rozważanego zamkniętego układu sterowania przeregulowanie $\kappa\% = 20\%$ oraz czas wystąpienia przeregulowania (czas maksimum) $T_\kappa = 1$ s. Jaka jest wartość czasów ustalania $T_{s2\%}$ oraz $T_{s5\%}$ tej odpowiedzi?



Rys. 3.6. Strukturalny schemat dwupętlowego układu sterowania

Rozwiązanie Transmitancję układu zamkniętego, daną wzorem

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{k + (1 + kk_t)s + s^2}$$

przedstawić można w standardowej postaci

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta\tau s + \tau^2 s^2} \quad (3.3)$$

gdzie

$$\tau^2 = \frac{1}{k} \quad \text{oraz} \quad 2\zeta\tau = \frac{1}{k} + k_t.$$

Przeregulowanie $\kappa\%$ oraz czas maksimum T_κ odpowiedzi skokowej układu modelowanego tą transmitancją, przy $0 < \zeta < 1$, dane są formułami

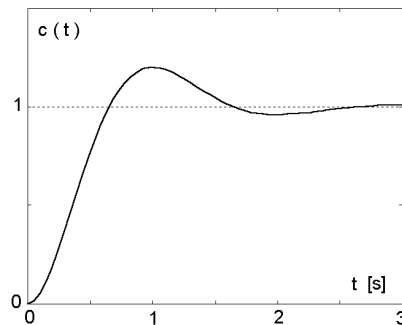
$$\kappa\% = \kappa \cdot 100\% = \exp\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right) \cdot 100\%, \quad T_\kappa = \frac{\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}} \cdot \tau \quad (3.4)$$

z których wynika, że

$$\zeta = \frac{|\ln \kappa|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \kappa}} \quad \text{oraz} \quad \tau = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\pi} \cdot T_\kappa. \quad (3.5)$$

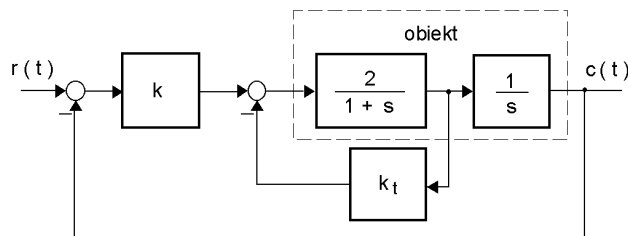
Skąd dla danych specyfikacji uzyskuje się parametry $\zeta = 0.456$ oraz $\tau = 0.283$ s, a następnie nastawy $k = 1/\tau^2 = 12.46$ oraz $k_t = 2\zeta\tau - 1/k = 0.178$.

Przebieg odpowiedzi skokowej układu sterowania zilustrowano na rys. 3.7. W oparciu o ten przebieg określono 'dokładne' wartości czasów ustalenia: $T_{s2\%} = 2.359$ s oraz $T_{s5\%} = 1.488$ s. Oszacowania tych czasów wynoszą: $T_{s2\%} \approx 4\tau/\zeta = 2.485$ s oraz $T_{s5\%} \approx 3\tau/\zeta = 1.86$ s.



Rys. 3.7. Odpowiedź skokowa układu sterowania

Przykład 3.2.2 Dany jest strukturalny schemat układu sterowania jak na rys. 3.8. W układzie tym występuje szeregowy regulator o wzmacnieniu k oraz dwie pętle ujemnego sprzężenia zwrotnego: zewnętrzna pętla jednostkowego sprzężenia położeniowego oraz wewnętrzna pętla sprzężenia prędkościowego – wzmacnienie sygnału w torze prędkościowego sprzężenia wynosi k_t .



Rys 3.8. Strukturalny schemat serwowatora prądu stałego

Należy dobrać takie wartości nastaw k oraz k_t , aby zamknięty układ był tłumiony krytycznie, zaś czas ustalania odpowiedzi skokowej tego układu wynosił $T_{s2\%} \leq 0.25s$.

Rozwiązanie Operatorowa transmitancja zamkniętego układu sterowania dana jest wzorem

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2k}{2k + (1 + 2k_t)s + s^2}.$$

Tę transmitancję drugiego rzędu przedstawić możemy w standardowej formie (3.3), przy czym w rozważanym przypadku mamy

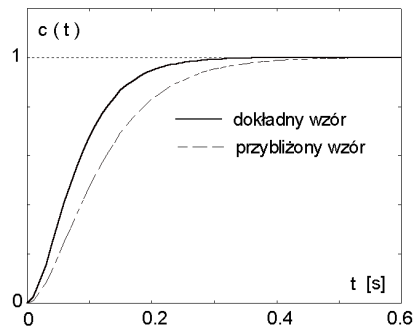
$$\tau^2 = \frac{1}{2k} \quad \text{oraz} \quad 2\zeta\tau = \frac{1}{2k} + \frac{k_t}{k}.$$

Z wymagań postawionych zamkniętemu układowi sterowania wynika, że $\zeta = 1$. Transmitancja (3.3) przyjmuje przeto postać $G(s) = 1/(1 + \tau s)^2$. Odpowiedź skokowa rozważanego układu dana jest przeto wzorem

$$h(t) = \mathcal{L}^{-1} \left(\frac{G(s)}{s} \right) = 1 - \left(1 + \frac{t}{T} \right) e^{-t/T}, \quad t \geq 0.$$

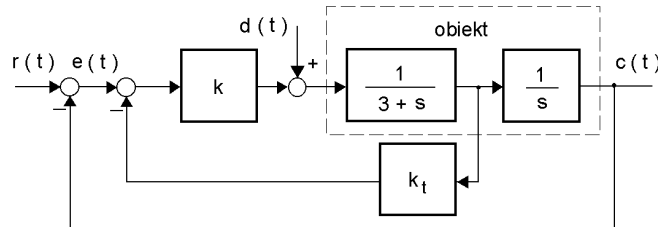
Niech $T_{s\Delta}$ oznacza czas ustalania tej odpowiedzi dla kontrolnej strefy o założonej szerokości $\pm\Delta$. Zachodzi zatem $(1 + T_{s\Delta}/\tau)e^{-T_{s\Delta}/\tau} = \Delta$. Rozwiązania tego nieliniowego równania dla $\Delta = 0.02$ oraz $\Delta = 0.05$ wynoszą odpowiednio: $T_{s2\%} \approx 5.834 \cdot \tau$ oraz $T_{s5\%} \approx 4.744 \cdot \tau$. Na tej podstawie wyznaczamy parametr $\tau = 0.04285$ s, któremu odpowiadają nastawy $k = 272.284$ oraz $k_t = 22.8347$.

Warto zwrócić uwagę, że przy $\zeta = 1$ podane wyżej wartości czasów ustalania $T_{s\Delta}$ istotnie odbiegają od odpowiednich przybliżonych wartości, uzyskanych na podstawie często zalecanych uproszczonych formuł: $T_{s2\%} \approx 4\tau/\zeta$ oraz $T_{s5\%} \approx 3\tau/\zeta$. Formuły te są bowiem słuszne tylko dla słabo tłumionych ($\zeta \ll 1$) odpowiedzi skokowych. W szczególności, zastosowanie wzoru $T_{s2\%} \approx 4\tau/\zeta$ prowadzi w naszym przypadku do nastaw znacznie różniących się od obliczonych wcześniej: $k = 128.0$ oraz $k_t = 15.5$. Jak łatwo sprawdzić, tak zaprojektowany układ sterowania charakteryzowałby się odpowiedzią skokową wolniejszą od wymaganej (por. rys. 3.9).



Rys 3.9. Porównanie odpowiedzi skokowych układu sterowania

Przykład 3.2.3 Na rys. 3.10 dany jest schemat układu sterowania położeniem z wykorzystaniem sygnału pomiarowego proporcjonalnego do prędkości roboczego elementu obiektu. Na obiekt ten, obok sygnału sterującego, oddziałuje także zakłócenie $d(t)$.



Rys. 3.10. Strukturalny schemat układu sterowania

Dobierz takie wartości nastaw k oraz k_t , aby dla zakłócenia $d(t) = 1(t)$ wartość bezwzględna ustalonego uchybu nie przekraczała $|e(\infty)| \leq 0.005$, zaś czas ustalania sygnałowej odpowiedzi skokowej układu zamkniętego wynosił $T_{s2\%} \leq 0.5$ s. Oszacuj przeregulowanie $\kappa\%$ tej odpowiedzi.

Rozwiązanie Sygnałowa transmitancja operatorowa układu zamkniętego dana jest wzorem

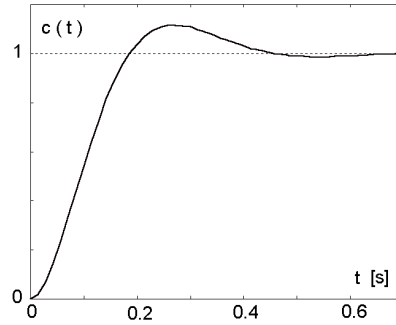
$$G_{rc}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{k + (3 + kk_t)s + s^2} \quad (3.6)$$

zaś zakłóceniovą uchybową transmitancję tego układu określa wzór

$$G_{de}(s) = \frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-1}{k + (3 + kk_t)s + s^2}.$$

Dla założonego zakłócenia ($D(s) = 1/s$) mamy $|e(\infty)| = 1/k$, $k > 0$. Na tej podstawie uzyskujemy ograniczenie $k \geq k_{\min} = 200$. Przedstawiając transmitancję (3.6) w standardowej postaci (3.3), otrzymujemy wzory: $\tau^2 = 1/k$ oraz $2\zeta\tau = 3/k + k_t$. Szacując czas ustalania jako $T_{s2\%} \approx 4\tau/\zeta$, na podstawie warunków zadania dostajemy $\tau = \zeta/8$. Przyjmijmy minimalną ze względu na wymagane tłumienie wpływu zakłócenia wartość wzmocnienia $k = k_{\min} = 200$. Ze wzoru $\zeta^2 = 64/k$ wynika przeto, że $\zeta = 0.566$. Takiej wartości współczynnika tłumienia odpowiada przeregulowanie $\kappa\% = 11.59\%$, wyznaczone ze wzoru (3.4). Parametr k_t , obliczony ze wzoru $k_t = 2\zeta\tau - 3/k$, równa się $k_t = 0.065$, zachodzi przy tym $\tau = 0.0707$ s. Sygnałowa odpowiedź

skokowa tak zaprojektowanego układu charakteryzuje się czasem ustalania $T_{s2\%} = 0.415$ s, spełniającym postawione wymaganie (por. rys. 3.11).



Rys. 3.11. Odpowiedź skokowa układu sterowania

Przykład 3.2.4 Zakładając, że operatorową transmitancję zamkniętego układu regulacji można przybliżyć następującą standardową transmitancją drugiego rzędu

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n s + s^2} \quad (3.7)$$

wyznacz na płaszczyźnie zespolonej miejsce geometryczne biegunów tej transmitancji, którym towarzyszy przeregulowanie $\kappa \leq \kappa_{\max} = 0.2$ oraz czas ustalania $T_{s2\%} \leq T_{s2\%_{\max}} = 0.5$ s odpowiedzi skokowej rozważanego układu.

Rozwiązanie Bieguny $s_{1,2}$ transmitancji (3.7) dane są wzorem

$$s_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$$

z którego wynika, że dla $0 < \zeta \leq 1$ zachodzi

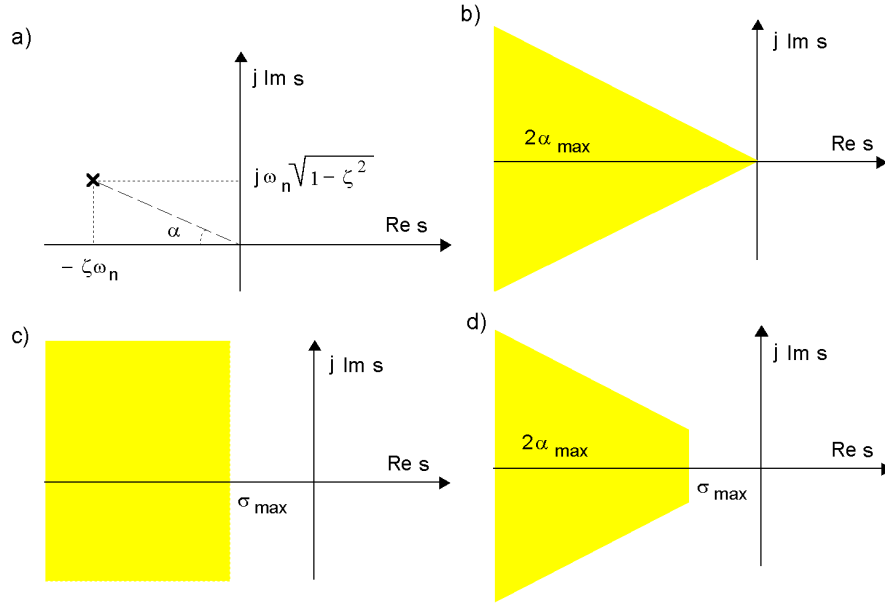
$$\tan \alpha = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$

(zob. rys. 3.12a), a zatem

$$\alpha = \arctan \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right) = \arccos \zeta. \quad (3.8)$$

Na podstawie wzorów (3.4) oraz (3.8) wnioskujemy, że $\kappa = e^{-\pi/\tan\alpha}$, co pozwala na zapisanie poszukiwanej zależności

$$\alpha \leq \alpha_{\max} = \arctan\left(-\frac{\pi}{\ln \kappa_{\max}}\right).$$



Rys. 3.12. Zależności między położeniem biegunów transmitancji drugiego rzędu a wskaźnikami κ oraz $T_{s2\%}$ odpowiedzi skokowej układu modelowanego tą transmitancją: **a)** położenie biegunów transmitancji drugiego rzędu, **b)** obszar dopuszczalnego położenia biegunów dla $\kappa \leq \kappa_{\max}$, **c)** obszar dopuszczalnego położenia biegunów dla $T_{s2\%} \leq T_{s2\%_{\max}}$, **d)** obszar dopuszczalnego położenia biegunów dla $\kappa \leq \kappa_{\max}$ oraz $T_{s2\%} \leq T_{s2\%_{\max}}$

Miejsce geometryczne biegunów transmitancji (3.7) układu zamkniętego, którego skokowa odpowiedź posiada przeregulowanie κ nie większe niż κ_{\max} , przedstawiono na rys. 3.12b. Przyjmując, że $T_{s2\%} \approx 4/(\zeta\omega_n)$, uzyskuje się następujące przybliżone oszacowanie

$$-\zeta\omega_n \leq \sigma_{\max} = -\frac{4}{T_{s2\%_{\max}}}.$$

Miejsce geometryczne biegunów rozważanej transmitancji (3.7) układu zamkniętego, charakteryzującego się czasem ustalania $T_{s2\%}$ nie większym niż

$T_{s2\%_{\max}}$, przedstawiono na rys 3.12c. Łącząc wymagania dotyczące przeregulowania κ oraz szybkości regulacji $T_{s2\%}$, otrzymuje się obszar dopuszczalnego położenia biegunów transmitancji (3.7), pokazany na rys. 3.12d.

Zgodnie z warunkami zadania otrzymujemy: $\alpha_{\max} = 62.9^\circ$ oraz $\sigma_{\max} = -8 \text{ (s}^{-1}\text{)}$. Rozważmy transmitancję (3.7) o przykładowych biegunach $s_{1,2} = -10 \pm j12$. Bieguny te należą do dopuszczalnego obszaru: zachodzi bowiem $\zeta = 0.6402$ oraz $\omega_n = 15.621 \text{ (rad} \cdot \text{s}^{-1}\text{)}$, a zatem $\alpha = 50.2^\circ$. Weryfikując powyższe rozważania na drodze symulacyjnej, stwierdzamy, że odpowiedź skokowa układu modelowanego transmitancją drugiego rzędu o podanych biegunach charakteryzuje się wskaźnikami $\kappa_{\%} = 7.3\%$ oraz $T_{s2\%} = 0.384 \text{ s}$.

W dalszych rozważaniach obowiązuje konwencja, zgodnie z którą, punkty na płaszczyźnie zespolonej \mathbb{C} traktujemy jako wielkości bezwymiarowe, każdorazowo pamiętając jednak o ich stosownej interpretacji w domenie czasu.

Przykład 3.2.5 Dana jest operatorowa transmitancja pewnego układu dynamicznego

$$G(s) = \frac{1}{1 + 2\zeta s + s^2}.$$

Jak można oszacować (zidentyfikować) wartość parametru ζ tej transmitancji?

Rozwiązanie Przedstawiając $G(s)$ w standardowej postaci (3.7), mamy $\omega_n = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Rozpatrzmy widmową transmitancję

$$G(j\omega) = \frac{\omega_n^2}{\omega_n^2 - \omega^2 + j2\zeta\omega_n\omega} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)^2 + j2\zeta\left(\frac{\omega}{\omega_n}\right)}.$$

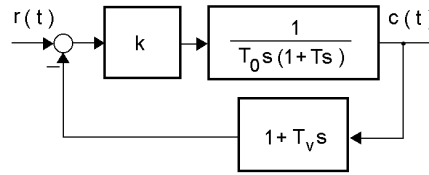
Łatwo stwierdzić, że dla $\omega = \omega_n$ zachodzi $G(j\omega_n) = 1/(j2\zeta)$. Zatem, mierząc wartość modułu $|G(j\omega)|$ dla tej pulsacji, uzyskujemy możliwość oceny współczynnika tłumienia ζ zgodnie z prostym wzorem

$$\zeta = \frac{1}{2|G(j\omega)|} \Big|_{\omega=1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}}.$$

Zauważmy, że dla układu opisanego rozważaną transmitancją rzędu drugiego, istnieje dogodna jednoznaczna zależność między współczynnikiem tłumienia ζ , a łatwym do pomierzenia przeregulowaniem κ odpowiedzi skokowej tego układu, zależność tę także można wykorzystać do oceny wartości ζ .

Zachęcamy Czytelnika do zaproponowania własnych metod identyfikacji parametrów standardowych transmitancji drugiego rzędu (3.3) oraz (3.7). W tym celu pomocne będą dane zamieszczone w dodatku 2 (tabela D2.1).

Przykład 3.2.6 Na rys. 3.13 dany jest schemat pewnego prostego układu regulacji, przy czym $T = 2\text{ s}$ oraz $T_0 = 0.3\text{ s}$. Należy w taki sposób ustalić wartość wzmocnienia k regulatora proporcjonalnego oraz stałą różniczkowania T_v , aby amplitudowa charakterystyka transmitancji układu zamkniętego opisana była wskaźnikiem oscylacyjności $M_r = 1.4$ oraz pasmem przenoszenia $\omega_{3\text{dB}} = 15\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Ponadto należy oszacować przeregulowanie κ , czas maksimum T_κ oraz czas ustalania $T_{s5\%}$ odpowiedzi skokowej tego układu.



Rys. 3.13. Strukturalny schemat układu regulacji

Rozwiązanie Operatorowa transmitancja rozważanego układu dana jest wzorem

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{k + (T_0 + kT_v)s + T_0Ts^2}.$$

Transmitancję tę przedstawiamy w standardowej postaci (3.3), gdzie

$$\tau = \sqrt{\frac{T_0T}{k}} \quad \text{oraz} \quad \zeta = \frac{T_v}{2\tau} + \frac{T_0}{2k\tau}.$$

Na podstawie wzorów zamieszczonych w *dodatku 2* zapisać można zależność

$$M_r^2 = \frac{1}{4\zeta^2(1 - \zeta^2)}, \quad 0 \leq \zeta \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

z której wynika użyteczna formuła

$$\zeta = \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{M_r^2}} \right)}, \quad M_r \geq 1 \quad (3.9)$$

łącząca wskaźnik oscylacyjności M_r ze współczynnikiem tłumienia ζ . Z kolei, parametr τ transmitancji (3.3) związany jest z pasmem przenoszenia $\omega_{3\text{dB}}$ układu modelowanego tą transmitancją oraz ze współczynnikiem tłumienia ζ następującym wzorem:

$$\tau = \frac{\sqrt{1 - 2\zeta^2 + \sqrt{(1 - 2\zeta^2)^2 + 1}}}{\omega_{3dB}}.$$

Biorąc pod uwagę warunki zadania, otrzymujemy $\zeta = 0.3874$ oraz $\tau = 0.0924$ s. Wartości nastawialnych parametrów układu regulacji wynoszą zatem $k = T_0 T / \tau^2 = 70.2969$ oraz $T_v = 2\zeta\tau - \tau^2 / T = 0.0673$ s. Skokowa odpowiedź tego układu opisana jest następującymi wskaźnikami: $\kappa\% = 26.7\%$, $T_\kappa = 0.315$ s, $\bar{T}_{s5\%} = 0.734$ s oraz $T_{s5\%} = 0.712$ s.

Przykład 3.2.7 Dynamiczny obiekt (układ zamknięty) opisany jest operatorową transmitancją drugiego rzędu

$$G(s) = \frac{1 + \sigma\tau s}{1 + 2\zeta\tau s + \tau^2 s^2}. \quad (3.10)$$

Zakładając ustaloną wartość współczynnika tłumienia ζ , $0 < \zeta < 1$, wyznacz taką wartość parametru σ , której odpowiada minimalne przeregulowanie κ odpowiedzi skokowej rozważanego obiektu.

Rozwiązanie Przeregulowanie κ dane jest wzorem (zob. *dodatek 2*)

$$\kappa(\zeta, \sigma) = \nu(\zeta, \sigma) \cdot e^{-\zeta\bar{T}_\kappa(\zeta, \sigma)}$$

gdzie

$$\begin{aligned} \nu(\zeta, \sigma) &= \sqrt{\sigma^2 - 2\sigma\zeta + 1} \\ \bar{T}_\kappa(\zeta, \sigma) &= \frac{\pi + \arctan\left(\frac{\sigma\sqrt{1-\zeta^2}}{\sigma\zeta-1}\right)}{\sqrt{1-\zeta^2}}. \end{aligned}$$

Różniczkując funkcję $\kappa(\zeta, \sigma)$ względem σ , otrzymuje się

$$\frac{\partial\kappa(\zeta, \sigma)}{\partial\sigma} = \left(\frac{\sigma - \zeta}{\nu(\zeta, \sigma)} - \zeta\nu(\zeta, \sigma) \cdot \frac{\partial\bar{T}_\kappa(\zeta, \sigma)}{\partial\sigma} \right) \cdot e^{-\zeta\bar{T}_\kappa(\zeta, \sigma)}. \quad (3.11)$$

Pochodną funkcji $\bar{T}_\kappa(\zeta, \sigma)$ względem σ wyznacza się ze wzoru

$$\frac{\partial\bar{T}_\kappa(\zeta, \sigma)}{\partial\sigma} = -\frac{1}{\nu^2(\zeta, \sigma)}. \quad (3.12)$$

Ze wzorów (3.11) oraz (3.12) wynika, że

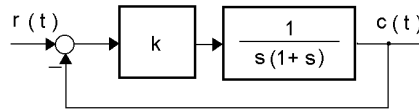
$$\frac{\partial \kappa(\zeta, \sigma)}{\partial \sigma} = \frac{\sigma}{\nu(\zeta, \sigma)} \cdot e^{-\zeta \bar{T}_\kappa(\zeta, \sigma)}.$$

Ze względu na zmienną σ funkcja $\kappa(\zeta, \sigma)$ posiada więc ekstremum w punkcie $\sigma = 0$, przy czym

$$\left. \frac{\partial^2 \kappa(\zeta, \sigma)}{\partial \sigma^2} \right|_{\sigma=0} = e^{-\zeta \bar{T}_\kappa(\zeta, 0)} > 0.$$

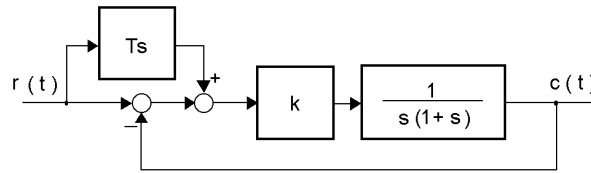
Przy ustalonym współczynniku tłumienia ζ minimalną wartość przeregulowania $\kappa(\zeta, \sigma)$ odpowiedzi skokowej uzyskuje się zatem dla zerowej wartości parametru σ . Ta minimalna wartość przeregulowania $\kappa(\zeta, \sigma)|_{\sigma=0}$ określona jest znanym wzorem (3.4).

Przykład 3.2.8 Model zamkniętego układu sterowania dany jest strukturalnym schematem jak na rys. 3.14.



3.14. Strukturalny schemat układu sterowania

- a) Zakładając, że odpowiedź skokowa tego układu ma się charakteryzować współczynnikiem tłumienia $\zeta = 0.25$, wyznacz odpowiednią wartość wzmocnienia k .
- b) Oblicz wartość ustalonego uchybu występującego w nastawionym jak wyżej układzie, jeżeli do jego wejścia przyłożony jest jednostkowy sygnał prędkościowy $r(t) = t \cdot 1(t)$.
- c) Sprawdź, czy można wyeliminować ustalony uchyb towarzyszący śledzeniu sygnału prędkościowego, wprowadzając do transmitancji układu zamkniętego rzeczywiste zero poprzez modyfikację tego układu według schematu pokazanego na rys. 3.15.



3.15. Strukturalny schemat układu sterowania z pomocniczym torem sygnałowym

Rozwiązanie

- a) Transmitancja układu z rys. 3.14 jest funkcją

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{k + s + s^2}$$

w której, po zapisaniu w standardowej formie (3.7), występują parametry

$$\zeta = \frac{1}{2\omega_n} = \frac{1}{2\sqrt{k}} \quad \text{oraz} \quad \omega_n = \sqrt{k}.$$

Założoną wartość współczynnika tłumienia $\zeta = 0.25$ uzyskuje się przeto dla $k = 4$.

- b) Transformata sygnału odpowiedzi układu na jednostkowe pobudzenie prędkościowe określona jest wzorem $C(s) = T(s)/s^2$, a zatem transformata uchybu przyjmuje postać

$$E(s) = R(s) - C(s) = \frac{2\zeta\omega_n + s}{s(\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n s + s^2)}$$

z której wynika ustalona wartość tego uchybu $e(\infty) = 2\zeta/\omega_n = 0.25$.

- c) Dla układu sterowania z rys. 3.15 zachodzi

$$T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k(1 + Ts)}{k + s + s^2}.$$

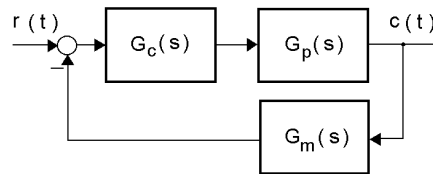
Transformata uchybu sterowania przy odtwarzaniu jednostkowego sygnału prędkościowego dana jest w tym przypadku wzorem

$$E(s) = R(s) - C(s) = \frac{1 - kT + s}{s(k + s + s^2)}.$$

Ustalona wartość uchybu równa się $e(\infty) = 1/k - T$, a zatem, kładąc $T = 1/k$, można ów uchyb sprowadzić do zera. Transmitancja tak

zmodyfikowanego układu przybiera postać $T(s) = (4 + s)/(4 + s + s^2)$. Polecamy Czytelnikowi sprawdzenie wpływu omawianej modyfikacji na wartość przeregulowania odpowiedzi skokowej układu zamkniętego (por. przykład 3.2.7).

Przykład 3.2.9 Dany jest układ regulacji o strukturalnym schemacie jak na rys. 3.16.



Rys. 3.16. Strukturalny schemat układu regulacji

Operatorowa transmitancja regulowanego obiektu ma postać

$$G_p(s) = \frac{k_p}{1 + T_p s}, \quad k_p = 4, \quad T_p = 0.15 \text{ s.}$$

Transmitancja

$$G_m(s) = \frac{1}{1 + T_m s}, \quad T_m = 0.01 \text{ s}$$

modeluje pomiarowy czujnik o inercyjnym charakterze. W układzie zastosowano proporcjonalny regulator o transmitancji $G_c(s) = k_c$. Wyznacz taką wartość wzmocnienia k_c regulatora, aby przeregulowanie $\kappa\%$ odpowiedzi $c(t)$ układu zamkniętego na jednostkowy skokowy sygnał wielkości zadającej $r(t)$ wynosiło $\kappa\% = 20\%$. Oblicz ustaloną wartość $c(\infty)$ uchybu regulacji $e(t) = r(t) - c(t)$ przy takim wzmocnieniu k_c .

Rozwiązanie Układ regulacji opisany jest operatorową transmitancją $G(s)$ daną wzorem

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)G_m(s)}.$$

Przedstawiając tę transmitancję w standardowej postaci (por. (3.10))

$$G(s) = G(0) \cdot \frac{1 + \sigma\tau s}{1 + 2\zeta\tau s + \tau^2 s^2}$$

otrzymuje się następujące formuły:

$$G(0) = G(s)|_{s=0} = \frac{k_c k_p}{1 + k_c k_p}, \quad \sigma = \sqrt{\frac{T_m(1 + k_c k_p)}{T_p}}$$

$$\zeta = \frac{T_m + T_p}{2\sqrt{T_m T_p(1 + k_c k_p)}}, \quad \tau = \sqrt{\frac{T_m T_p}{1 + k_c k_p}}.$$

Zakładając, że $0 < \zeta < 1$ oraz korzystając z *dodatku 2*, można wyprowadzić poniższy wzór, opisujący zależność przeregulowania κ odpowiedzi skokowej badanego układu od parametrów k_c , T_m oraz T_p jego transmitancji:

$$\kappa = \exp\left(-\frac{\alpha}{\sqrt{\chi^2 - \alpha^2}} \left(\pi + \arctan\left(\frac{\beta\sqrt{\chi^2 - \alpha^2}}{\gamma - 1}\right)\right)\right) \cdot \sqrt{1 + \beta^2\chi^2 - 2\gamma} \quad (3.13)$$

gdzie

$$\alpha = \frac{T_m + T_p}{2\sqrt{T_m T_p}}, \quad \beta = \sqrt{\frac{T_m}{T_p}} \quad \text{oraz} \quad \gamma = \frac{T_m + T_p}{2T_p}$$

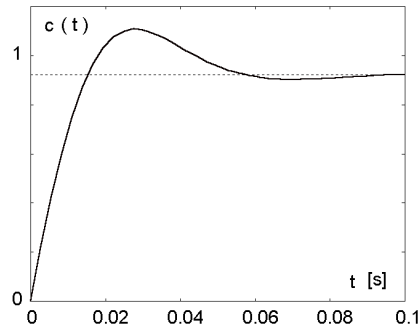
są parametrami, zaś

$$\chi = \sqrt{1 + k_c k_p}$$

oznacza pomocniczą niewiadomą zależną od wzmocnienia k_c . Zgodnie z warunkami przykładu mamy: $\alpha = 2.06559$, $\beta = 0.258199$ oraz $\gamma = 0.533333$.

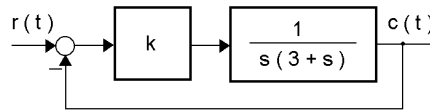
Przy ustalonej wartości κ wzór (3.13) określa równanie, z którego wyznacza się niewiadomą χ . W ogólnym przypadku jest to równanie nieliniowe i jego przybliżonego rozwiązania poszukuje się na drodze numerycznej.

Tak postępując, dla $\kappa = 0.2$ otrzymano $\chi = 3.590042$, zaś odpowiednie wzmocnienie regulatora wynosi $k_c = 2.9721$. Ustaloną wartość uchybu dla jednostkowego sygnału zadającego oblicza się ze wzoru $e(\infty) = 1 - G(0) = 1/(1 + k_c k_p) = 0.07759$. Przebieg odpowiedzi skokowej rozważanego układu regulacji, pozwalający na weryfikację poprawności uzyskanego rozwiązania, przedstawiono na rys. 3.17.



Rys. 3.17. Odpowiedź skokowa układu regulacji

Zadanie 3.2.1 Na rys. 3.18 dano strukturalny schemat pewnego układu regulacji – serwowatora prądu stałego z regulatorem proporcjonalnym.



Rys. 3.18. Strukturalny schemat układu regulacji

Określ wartość wzmocnienia k tego regulatora, przy której układ zamknięty jest: **a)** – układem o oscylacyjnym charakterze, **b)** – układem o krytycznym tłumieniu oraz **c)** – układem przetłumionym.

Odpowiedź Układ jest układem: **a)** – oscylacyjnym dla $k > 2.25$, **b)** – krytycznie tłumionym dla $k = 2.25$ oraz **c)** – przetłumionym dla $k < 2.25$.

Zadanie 3.2.2 Obiekt dynamiczny, którego model stanowi operatorowa transmitancja

$$G_p(s) = \frac{1}{(5+s)(0.2+s)}$$

jest sterowany w układzie zamkniętym z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym za pośrednictwem proporcjonalnego regulatora o wzmocnieniu k .

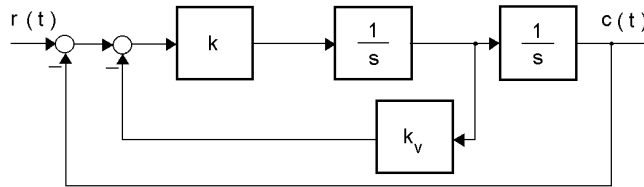
a) Przy jakim k odpowiedź skokowa tego układu będzie miała oscylacyjny charakter?

- b) Wyznacz wartość k , przy której przeregulowanie $\kappa\%$ odpowiedzi skokowej układu zamkniętego wyniesie $\kappa\% = 25\%$.
- c) Oblicz ustaloną wartość tej odpowiedzi dla wzmocnienia k wyznaczonego w punkcie **b**.

Odpowiedź

- a) Oscylacje w przebiegu odpowiedzi skokowej wystąpią przy $k > 5.76$.
- b) Przeregulowanie odpowiedzi skokowej ma wartość $\kappa\% = 25\%$ dla $k = 40.476$.
- c) Ustalona wartość odpowiedzi skokowej układu wynosi $h(\infty) = 0.976$.

Zadanie 3.2.3 Dany jest schemat układu sterowania jak na rys 3.19.



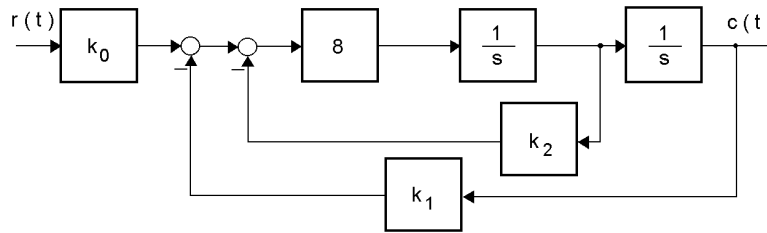
Rys. 3.19. Strukturalny schemat układu sterowania

- a) Podaj operatorową transmitancję układu zamkniętego.
- b) Przyjmując, że $r(t) = 10 \cdot 1(t)$, określ wartość odpowiedzi tego układu w stanie ustalonym.
- c) Odpowiedź zamkniętego układu na skokowy sygnał $r(t)$ osiąga bez przeregulowań wartość ustaloną w najkrótszym czasie, jeżeli współczynnik tłumienia transmitancji tego układu równa się $\zeta = 1$. Wyznacz wartość parametru k_v , przy której ten warunek zachodzi.
- d) Zakładając, że układ o parametrach określonych w punkcie **c** ma osiągnąć (z dokładnością $\pm 2\%$) stan ustalony po 6 sekundach od momentu przyłożenia skokowego sygnału zadającego, znajdź wartość parametru k , która zapewni spełnienie tego wymagania.

Odpowiedź

- a) $T(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{k}{k + k k_v s + s^2}$.
- b) Wartość ustalona odpowiedzi wynosi $c(\infty) = 10$.
- c) Poszukiwany warunek dany jest wzorem $k_v = 2/\sqrt{k}$, $k > 0$.
- d) Wymagania spełniają parametry $k = 0.9454$ oraz $k_v = 2.0569$.

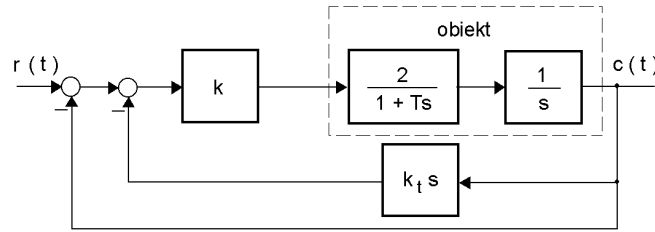
Zadanie 3.2.4 Dany jest strukturalny schemat pewnego układu sterowania (rys. 3.20). Należy tak dobrać wartości współczynników k_0 , k_1 oraz k_2 , aby układ ten charakteryzował się jednostkowym statycznym wzmocnieniem oraz skokową odpowiedzią o przeregulowaniu $\kappa\% \approx 10\%$ i czasie ustalania $T_{s2\%} \approx 0.5$ s.



Rys. 3.20. Strukturalny schemat układu sterowania

Odpowiedź Układ o parametrach $k_0 = k_1 = 22.222$ oraz $k_2 = 2$ posiada odpowiedź skokową opisaną wskaźnikami o akceptowalnych wartościach: $\kappa\% = 9.48\%$ oraz $T_{s2\%} = 0.446$ s.

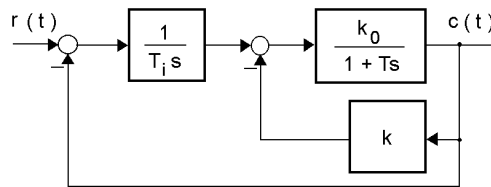
Zadanie 3.2.5 Na rys. 3.21 podany jest schemat strukturalny pewnego układu regulacji z pomocniczym sprzężeniem prędkościowym. W wyniku identyfikacyjnego eksperymentu ustalono, że odpowiedź skokowa układu, w którym z takiego sprzężenia prędkościowego się nie korzysta ($k_t = 0$), charakteryzuje się przeregulowaniem $\kappa\% = 50\%$ oraz czasem ustalania $T_{s2\%} = 2$ s. Uznano, że proces przejściowy o takich wskaźnikach nie spełnia stawianych wymagań – żąda się bowiem dwukrotnie mniejszego przeregulowania, a także dwukrotnie mniejszego czasu ustalania. Wyznacz takie wartości parametrów k oraz k_t , które zapewnią wymaganą jakość procesu przejściowego.



Rys. 3.21. Strukturalny schemat układu regulacji

Odpowiedź Z eksperymentu identyfikacyjnego wynika następujące oszacowanie stałej czasowej T obiektu: $\hat{T} = 0.254$ s. Traktując \hat{T} jako nominalny parametr transmitancji obiektu, wyznaczono wartości nastaw układu regulacji: $k = 12.478$ oraz $k_t = 0.0414$. 'Rzeczywista' wartość stałej czasowej obiektu wynosi $T = 0.272$ s. Symulując odpowiedź skokową tak zaprojektowanego układu zamkniętego, stwierdzono, że $\kappa\% = 26.4\%$ oraz $T_{s2\%} = 0.88$ s.

Zadanie 3.2.6 Strukturalny schemat układu regulacji, złożonego z inercyjnego obiektu objętego korekcyjnym sprzężeniem zwrotnym oraz całkującego regulatora, przedstawiono na rys. 3.22. Parametry operatorowej transmitancji obiektu wynoszą: $k_0 = 8$ oraz $T = 0.3$ s. Należy tak dobrać nastawę T_i regulatora całkującego oraz wartość wzmocnienia k toru korekcyjnego sprzężenia zwrotnego, aby przeregulowanie odpowiedzi skokowej układu zamkniętego równało się $\kappa\% = 15\%$, zaś pasmo przenoszenia tego układu miało wartość $\omega_{3dB} = 15 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



Rys. 3.22. Strukturalny schemat układu regulacji

Odpowiedź Parametry układu to: $T_i = 0.1859$ s oraz $k = 0.3393$.

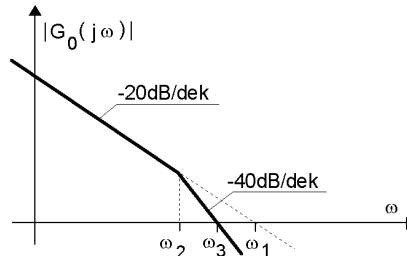
Zadanie 3.2.7 Układ dynamiczny opisany jest transmitancją

$$G(s) = \frac{4}{4 + 4\zeta s + s^2}.$$

Przy jakiej wartości współczynnika tłumienia ζ pasmo przenoszenia tego układu będzie równe pulsacji drgań nietłumionych?

Odpowiedź Poszukiwana wartość wynosi $\zeta = 1/\sqrt{2} \approx 0.707$.

Zadanie 3.2.8 Wyznaczono asymptotyczną logarytmiczną charakterystykę amplitudową pewnego otwartego układu regulacji z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym (rys. 3.23).



Rys. 3.23. Asymptotyczna logarytmiczna charakterystyka amplitudowa układu otwartego

Podaj typ i parametry transmitancji operatorowej $G_0(s)$ układu dynamicznego modelowanego tą charakterystyką (zakładając jego minimalnofazowość), a następnie określ zależność współczynnika tłumienia ζ transmitancji odpowiedniego układu zamkniętego od charakterystycznych pulsacji ω_1 , ω_2 oraz ω_3 , występujących na tym rysunku.

Odpowiedź Rozważana transmitancja ma postać

$$G_0(s) = \frac{k_v}{s(1 + Ts)}$$

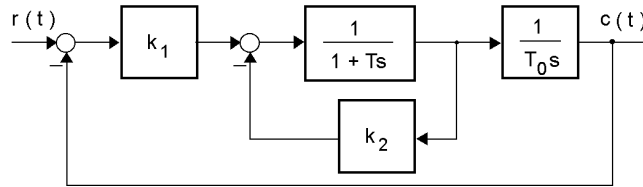
gdzie

$$k_v = \omega_1 \quad \text{oraz} \quad T = \frac{1}{\omega_2}.$$

Zachodzi ponadto

$$\omega_3^2 = \omega_1 \omega_2 = \frac{k_v}{T} \quad \text{oraz} \quad \zeta = \frac{\sqrt{\frac{\omega_2}{\omega_1}}}{2} = \frac{\omega_2}{2\omega_3} = \frac{\omega_3}{2\omega_1}.$$

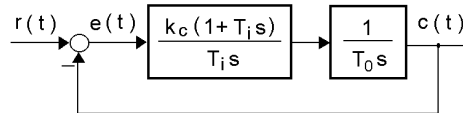
Zadanie 3.2.9 Schemat pewnego układu regulacji z korekcyjnym sprzężeniem dano na rys. 3.24, przy czym $T = 5$ s oraz $T_0 = 0.5$ s. Wyznacz parametry k_1 oraz k_2 zapewniające transmitancji układu zamkniętego wskaźnik oscylacyjności $M_r = 1.25$ oraz pasmo przenoszenia $\omega_{3dB} = 8 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Oszacuj wskaźniki $\kappa\%$, T_κ oraz $T_{s2\%}$ odpowiedzi skokowej tego układu.



Rys. 3.24. Strukturalny schemat układu regulacji

Odpowiedź Dla $k_1 = 90.5905$ oraz $k_2 = 25.9207$ mamy: $\kappa\% = 20.79\%$, $T_\kappa = 0.584$ s, $T_{s2\%} = 1.495$ s oraz $T_{s2\%} = 1.388$ s.

Zadanie 3.2.10 Układ regulacji złożony jest z obiektu o całującym charakterze oraz regulatora PI (rys. 3.25).



Rys. 3.25. Strukturalny schemat układu regulacji

Przyjmując $T_0 = 4$ s, wyznacz wartości nastaw k_c oraz T_i tego regulatora, zapewniające układowi regulacji wskaźnik oscylacyjności $M_r = 1.3$ oraz pasmo przenoszenia $\omega_{3dB} = 3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Oszacuj przeregulowanie $\kappa\%$, czas maksimum T_κ oraz czas ustalania $T_{s5\%}$ odpowiedzi skokowej tak zaprojektowanego układu.

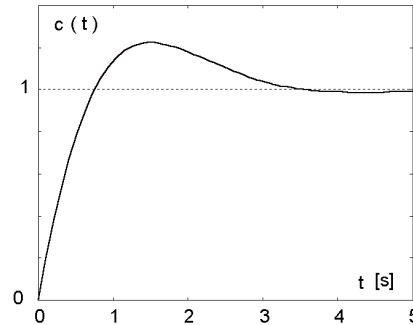
Wskazówka: pokaż, że dla transmitancji drugiego rzędu (3.10) ze skończonym zerem odpowiadającym $\sigma = 2\zeta$ słuszne są następujące zależności:

$$\zeta = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{\alpha}}{2\alpha}} \quad \text{oraz} \quad \tau = \frac{\sqrt{\beta + \sqrt{1 + \beta^2}}}{\omega_{3dB}}$$

gdzie

$$\alpha = 1 - \frac{1}{M_r^2} \quad \text{oraz} \quad \beta = 1 + 2\zeta^2.$$

Odpowiedź Regulator PI o nastawach $k_c = 2\zeta T_0/\tau = 7.9618$ oraz $T_i = 2\zeta\tau = 0.8885\text{s}$ prowadzi do układu regulacji o skokowej odpowiedzi opisanej wskaźnikami: $\kappa\% = 22.28\%$, $T_\kappa = 1.51\text{s}$, $\bar{T}_{s5\%} = 3.30\text{s}$ oraz $T_{s5\%} = 2.90\text{s}$. Przebieg tej odpowiedzi pokazano na rys. 3.26.



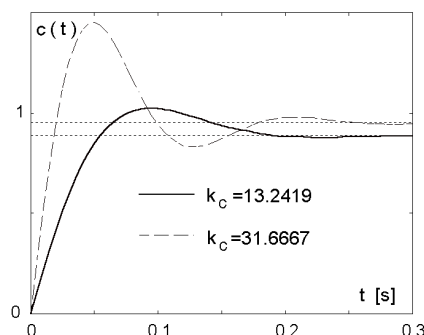
Rys. 3.26. Odpowiedź skokowa układu regulacji

Zadanie 3.2.11 Dany jest układ regulacji o strukturalnym schemacie jak na rys. 3.16. Obiekt regulacji opisany jest transmitancją $G_p(s)$, zaś zaś transmitancja $G_m(s)$ modeluje własności czujnika wielkości sterowanej $c(t)$, przy czym

$$G_p(s) = \frac{0.6}{1 + 0.35s} \quad \text{oraz} \quad G_m(s) = \frac{1}{1 + 0.03s}.$$

Wyznacz wzmocnienie k_c proporcjonalnego regulatora $G_c(s) = k_c$, zapewniające temu układowi odpowiedź skokową o przeregulowaniu $\kappa\% = 15\%$. Sprawdź, czy dla jednostkowego skokowego sygnału zadającego $r(t)$ przy założonej wartości przeregulowania κ można uzyskać ustaloną wartość uchybu regulacji $e(t) = r(t) - c(t)$, równą $e(\infty) = 0.05$. W przypadku odpowiedzi negatywnej, wyznacz wzmocnienie k_c proporcjonalnego regulatora, pozwalające na żądane zmniejszenie uchybu, a następnie oszacuj przeregulowanie $\kappa\%$ odpowiedzi skokowej układu z tak nastawionym regulatorem.

Odpowiedź Wzmocnienie $k_c = 13.2419$ zapewnia układowi regulacji skokową odpowiedź o przeregulowaniu $\kappa\% = 15\%$ oraz ustalonym uchybie $e(\infty) = 0.11179$. Żądanie $e(\infty) = 0.05$ można spełnić, przyjmując $k_c = 31.6667$. Takiemu wzmocnieniu towarzyszy jednak skokowa odpowiedź o przeregulowaniu $\kappa\% = 52.8\%$, które wielokrotnie przekracza dopuszczalną wartość (por. rys. 3.27).



Rys. 3.27. Porównanie odpowiedzi skokowych dla różnych wartości wzmocnień regulatora

3.3 Układy wyższych rzędów. Obiekty z opóźnieniem

Przykład 3.3.1 Model dynamicznego układu dany jest następującą operatorową transmitancją trzeciego rzędu

$$G(s) = \frac{8}{10 + 9s + 4.5s^2 + s^3}. \quad (3.14)$$

W wyniku symulacji tego układu stwierdzono, że jego odpowiedź skokowa posiada przeregulowanie $\kappa\% = 10.6\%$, czas maksimum $T_\kappa = 2.328$ s, czas narastania $T_r = 1.056$ s oraz czas ustalania $T_{s2\%} = 3.267$ s, zaś amplitudowa charakterystyka transmitancji (3.14) opisana jest wskaźnikiem oscylacyjności $M_r = 1.031$, rezonansową pulsacją $\omega_r = 1.071$ rad \cdot s $^{-1}$ oraz pasmem przenoszenia $\omega_{3dB} = 2.13$ rad \cdot s $^{-1}$. Należy w taki sposób uprościć transmitancję $G(s)$, czyli pierwotny model wysokiego rzędu, aby zredukowany model drugiego rzędu:

- dopasowywał wartości wskaźników $\kappa\%$ oraz $T_{s2\%}$ pierwotnego modelu,
- dopasowywał wartości wskaźników $\kappa\%$ oraz T_κ pierwotnego modelu,
- zachowywał dominujące bieguny pierwotnego modelu.

O wszystkich zredukowanych modelach drugiego rzędu zakłada się, że ich statyczne wzmocnienia równe są statycznemu wzmocnieniu upraszczanego modelu (3.14). Ponadto, dla każdego zredukowanego modelu należy oszacować wartości wymienionych wyżej wskaźników odpowiedzi skokowej oraz

charakterystyki amplitudowej, porównując je z wartościami opisującymi pierwotny model (3.14). Upraszczanie modelu wysokiego rzędu należy poprzedzić analizą uzasadniającą dopuszczalność takiej redukcji.

Rozwiązanie Przedstawmy mianownik transmitancji (3.14) w postaci czynników pierwszego oraz drugiego stopnia

$$G(s) = \frac{8}{(2.5 + s)(4 + 2s + s^2)}.$$

Jak widzimy, pierwszemu czynnikowi odpowiada inercyjny człon dynamiczny pierwszego rzędu o stałej czasowej $\tau_1 = 0.4 \text{ s}$, zaś z drugim czynnikiem związany jest oscylacyjny człon dynamiczny drugiego rzędu, którego współczynnik tłumienia wynosi $\zeta_0 = 0.5$, a pulsacja naturalna ma wartość $\omega_n = 2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ – czemu odpowiada stała czasowa $\tau_2 = 1/(\zeta_0 \omega_n) = 1 \text{ s}$. Z powyższego wynika, że stała czasowa członu drugiego rzędu jest znacznie większa od stałej czasowej członu pierwszego rzędu – można więc przyjąć, że to drugi z wyróżnionych członów decyduje o właściwościach rozważanego układu dynamicznego. Uproszczenie transmitancji (3.14) tego układu do odpowiedniej transmitancji niższego rzędu wydaje się zatem dopuszczalne. Niech operatorowa transmitancja

$$G_r(s) = \frac{k\omega_n^2}{\omega_n^2 + 2\zeta\omega_n s + s^2} = \frac{k}{1 + 2\zeta\tau s + \tau^2 s^2}, \quad \tau = \frac{1}{\omega_n}$$

określa zredukowany model (por. (3.3) oraz (3.7)). Zakładając równość statycznych wzmocnień pierwotnego modelu oraz modeli zredukowanych, otrzymujemy $k = G(s)|_{s=0} = 0.8$.

a) Z wymagania głoszącego, że przeregulowanie odpowiedzi skokowej układu opisanego zredukowanym modelem ma się równać $\kappa\% = 10.6\%$, wynika, że $\zeta = 0.581$. Takiej wartości współczynnika tłumienia odpowiadają następujące wskaźniki charakteryzujące układ modelowany transmitancją $G_r(s)$: $T_\kappa = 3.861\tau$, $T_{s2\%} = 5.905\tau$, $T_r = 1.8095\tau$, $M_r = 1.057$, $\omega_r = 0.569/\tau$ oraz $\omega_{3\text{dB}} = 1.173/\tau$. Żądając dopasowania wartości wskaźników κ oraz $T_{s2\%}$, uzyskuje się $\tau = 3.267/1.905 \text{ s} = 0.5533 \text{ s}$, czemu odpowiada pierwszy zredukowany model

$$G_{ra}(s) = \frac{2.6134}{3.2668 + 2.1013s + s^2}.$$

Model ten opisany jest wskaźnikami: $T_\kappa = 2.136 \text{ s}$, $T_r = 1.001 \text{ s}$, $M_r = 1.057$, $\omega_r = 1.029 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ oraz $\omega_{3\text{dB}} = 2.12 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

- b) Drugiemu zredukowanemu modelowi, dopasowującemu wartości wskaźników κ oraz T_κ , przyporządkować można parametr $\tau = 2.328/3.861 \text{ s} = 0.6029 \text{ s}$. Model ten ma zatem postać

$$G_{rb}(s) = \frac{2.2007}{2.7508 + 1.9282s + s^2}$$

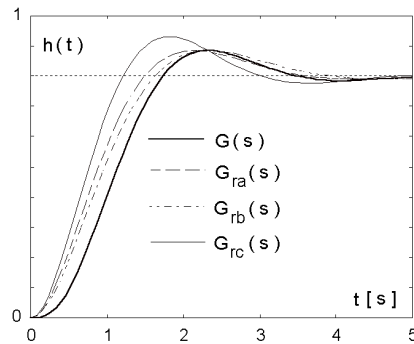
opisaną wskaźnikami: $T_{s2\%} = 3.56 \text{ s}$, $T_r = 1.091 \text{ s}$, $M_r = 1.057$, $\omega_r = 0.946 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ oraz $\omega_{3\text{dB}} = 1.944 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Zauważmy, że współczynniki mianownikowych wielomianów obu wyznaczonych uproszczonych modeli znacznie różnią się od odpowiednich współczynników czynnikowego wielomianu drugiego stopnia, występującego w mianowniku transmittancji $G(s)$ modelu wysokiego rzędu.

- c) Model zredukowany, zachowujący parę dominujących zespolonych biegunów modelu pierwotnego $G(s)$, ma postać daną wzorem

$$G_{rc}(s) = \frac{3.2}{4 + 2s + s^2}$$

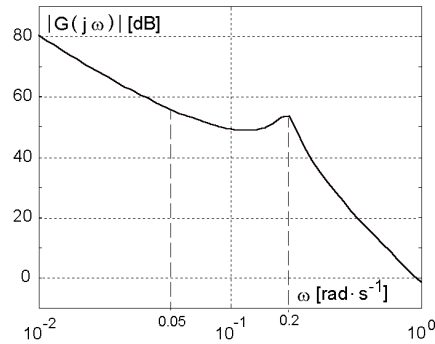
Dynamiczne własności tego modelu opisują wskaźniki: $\kappa\% = 16.3\%$, $T_\kappa = 1.811 \text{ s}$, $T_r = 0.819 \text{ s}$, $T_{s2\%} = 4.04 \text{ s}$, $M_r = 1.155$, $\omega_r = 1.413 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ oraz $\omega_{3\text{dB}} = 2.54 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

Skokowe odpowiedzi $h(t)$ zilustrowane na rys. 3.28 uzupełniają powyższą analizę rozważanych modeli zredukowanych.



Rys. 3.28. Porównanie skokowych odpowiedzi zredukowanych modeli

Przykład 3.3.2 Amplitudowa charakterystyka Bodego transmitancji pewnego minimalnofazowego układu dynamicznego dana jest na rys. 3.29. Należy wyznaczyć operatorową transmitancję tego układu.



Rys. 3.29. Amplitudowa charakterystyka Bodego układu dynamicznego

Rozwiązanie Porównując przedstawioną charakterystykę amplitudową z charakterystyką typowego członu drugiego rzędu (zob. *dodatek 2*), stwierdzamy, że w skład rozważanego układu wchodzi człon o pulsacji $\omega_n = 0.2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ i współczynnikiem tłumienia $\zeta \approx 0.1$. Uwzględniając istnienie pulsacji załamania w punkcie $\omega \approx 0.05 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ oraz nachylenie -40 dB/dek w obszarze dolnych pulsacji, analizowanej charakterystyce amplitudowej przy-
porządkować można następującą widmową transmitancję:

$$G(j\omega) = \frac{k \left(1 + j \frac{\omega}{0.05}\right)}{(j\omega)^2 \left(1 + 2 \cdot 0.1 \left(j \frac{\omega}{0.2}\right) + \left(j \frac{\omega}{0.2}\right)^2\right)}.$$

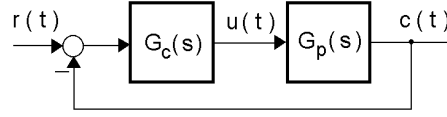
Ponieważ $|G(j0.01)|_{\text{dB}} = 80 \text{ dB}$, przeto przyjmujemy, że $k = 1$. Identyfikowana transmitancja operatorowa ma zatem postać

$$G(s) = \frac{1 + 20s}{s^2(1 + s + 25s^2)}.$$

Przykład 3.3.3 Na rys. 3.30 pokazano strukturalny schemat typowego układu zamkniętego, w którym obiekt o operatorowej transmitancji

$$G_p(s) = \frac{6}{(1 + 4s)(1 + s)(1 + 0.125s)}. \quad (3.15)$$

jest sterowany za pomocą regulatora o transmitancji $G_c(s)$.



Rys. 3.30. Strukturalny schemat układu regulacji

Wykorzystując uproszczoną metodę nastawienia regulatorów z rodziny *PID*, polegającą na takim doborze zer transmitancji regulatora, aby w bezpośredni sposób kompensować wpływ biegunów transmitancji obiektu, należy określić wartości nastaw regulatorów *PI* oraz *PID*, zapewniające układowi regulacji wskaźnik oscylacyjności $M_r = 1.3$. Należy ponadto oszacować prze-regulowanie κ , czas maksimum T_κ oraz czas ustalania $T_{s5\%}$ odpowiedzi skokowej, a także rezonansową pulsację ω_r i pasmo przenoszenia ω_{3dB} tego układu.

Rozwiązanie Zakłada się, że operatorową transmitancję

$$G_{rc}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

toru śledzenia wielkości zadającej $r(t)$ w rozważanym zamkniętym układzie regulacji przybliżyć można za pomocą odpowiedniej wzorcowej transmitancji $G_w(s)$ o postaci standardowej transmitancji drugiego rzędu (3.3) o parametrach wyznaczonych żądanym położeniem pary dominujących biegunów zespolonych. Rozważmy zatem sytuację, w której jako model regulowanego obiektu przyjmujemy szeregowe połączenie n członów dynamicznych pierwszego rzędu

$$G_p(s) = \frac{k_0}{\prod_{j=1}^n (1 + T_j s)} \quad (3.16)$$

zaś transmitancje regulatorów *PI* oraz *PID* posiadają następujące idealizowane formy, odpowiednio:

$$G_{PI}(s) = k_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \quad (3.17)$$

$$G_{PID}(s) = k_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) (1 + T_d s). \quad (3.18)$$

Aby transmitancję $G_{rc}(s)$ zamkniętego układu regulacji można było przybliżyć przyjętą wzorcową transmitancją $G_w(s)$, niezbędna jest stosowna redukcja rzędu modelu obiektu (3.16). W przypadku regulatora *PI*, przy $n \geq 2$, model zredukowany ma postać transmitancji drugiego rzędu

$$\tilde{G}_p(s) = \frac{k_0}{(1 + T_1 s)(1 + T_\Sigma s)}, \quad T_\Sigma = \sum_{j=2}^n T_j \quad (3.19)$$

gdzie przez T_1 oznaczono największą (dominującą) stałą czasową obiektu (3.16). W przypadku regulatora *PID*, przy $n \geq 3$, poszukuje się zredukowanego modelu trzeciego rzędu

$$\tilde{G}_p(s) = \frac{k_0}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)(1 + T_\Sigma s)}, \quad T_\Sigma = \sum_{j=3}^n T_j \quad (3.20)$$

gdzie T_1 oraz T_2 oznaczają dwie największe (dominujące) stałe czasowe regulowanego obiektu (3.16). W obu rozważanych przypadkach w transmitancji zredukowanego modelu tego obiektu wyróżnia się zatem dominujące stałe czasowe (T_1 lub T_1 i T_2) oraz pewną zastępczą stałą czasową T_Σ . Prosta reguła kompensacyjnego nastawiania regulatorów z rodziny *PID* wymaga, aby były spełnione odpowiednie równości:

$$\begin{aligned} PI &: T_i = T_1 \\ PID &: T_i = T_1, \quad T_d = T_2. \end{aligned}$$

Wzmocnienie k_c danego regulatora dobiera się w ten sposób, aby zaspokoić dodatkowe wymagania nakładane na układ regulacji (w rozważanym przypadku żąda się, aby wskaźnik oscylacyjności M_r układu zamkniętego przyjmował określoną wartość, por. wzór (3.9)).

Interesujący nas model zamkniętego układu regulacji, określony na podstawie uproszczonej transmitancji obiektu $\tilde{G}_p(s)$ oraz transmitancji $G_c(s)$ zastosowanego regulatora (3.17) lub (3.18), przyjmuje zatem postać

$$\tilde{G}_{rc}(s) = \frac{G_c(s)\tilde{G}_p(s)}{1 + G_c(s)\tilde{G}_p(s)} = \frac{k_0 k_c}{k_0 k_c + T_1 s + T_1 T_\Sigma s^2}.$$

Porównując transmitancje $G_w(s)$ oraz $\tilde{G}_{rc}(s)$, uzyskuje się formuły:

$$\tau = 2\zeta T_\Sigma \quad \text{oraz} \quad k_c = \frac{T_1}{4\zeta^2 k_0 T_\Sigma}.$$

Ze wzoru (3.9) wynika, że $\zeta = 0.42487$. Nastawiając regulator *PI*, przyjmuje się następujące parametry zredukowanego modelu (3.19): $T_1 = 4$ s, $T_\Sigma = 1.125$ s oraz $k_0 = 6$. W przypadku regulatora *PID* zredukowany model (3.20) jest zgodny z pierwotnym modelem (3.15) regulowanego obiektu: $T_1 =$

4 s, $T_2 = 1$ s, $T_\Sigma = 0.125$ s oraz $k_0 = 6$. Powyższe ustalenia prowadzą do następujących nastaw regulatorów (3.17) i (3.18) oraz odpowiadających im oszacowań wskaźników jakości regulacji:

- regulator PI : $k_c = 0.8207$, $T_i = 4$ s, $\tau = 0.95596$ s, $\kappa\% = 22.89\%$, $T_\kappa = 3.318$ s, $T_{s5\%} \leq \bar{T}_{s5\%} = 6.964$ s, $\omega_r = 0.836$ rad \cdot s $^{-1}$ oraz $\omega_{3dB} = 1.413$ rad \cdot s $^{-1}$;
- regulator PID : $k_c = 7.3863$, $T_i = 4$ s, $T_d = 1$ s, $\tau = 0.1062$ s, $\kappa\% = 22.89\%$, $T_\kappa = 0.369$ s, $T_{s5\%} \leq \bar{T}_{s5\%} = 0.774$ s, $\omega_r = 7.525$ rad \cdot s $^{-1}$ oraz $\omega_{3dB} = 12.719$ rad \cdot s $^{-1}$.

Wskaźniki jakości charakteryzujące 'rzeczywisty' układ regulacji – to znaczy układ złożony z obiektu o transmitancji wysokiego rzędu (3.15) oraz zaprojektowanego regulatora – dane są poniżej (dotyczą one tylko układu z regulatorem PI ; w przypadku układu, w którym stosuje się regulator PID , odpowiednie oszacowania należy uzupełnić jedynie 'dokładną' wartością czasu ustalania $T_{s5\%} = 0.771$ s): $\kappa\% = 27.4\%$, $T_\kappa = 3.22$ s, $T_{s5\%} = 7.18$ s, $M_r = 1.417$, $\omega_r = 0.927$ rad \cdot s $^{-1}$ oraz $\omega_{3dB} = 1.52$ rad \cdot s $^{-1}$. Porównanie wartości wskaźników jakości regulacji uzyskanych na drodze symulacji ze stosownymi wartościami wynikającymi z założeń projektowych, prowadzi do wniosku, że w badanym układzie zastosowano regulator PI o zbyt dużej wartości wzmocnienia k_c . Nastawę tę wyznaczono bowiem na podstawie zredukowanego modelu (3.19) regulowanego obiektu, podczas gdy 'rzeczywisty' obiekt (3.15) wprowadza do fazowej charakterystyki transmitancji układu otwartego silniejsze ujemne przesunięcie fazy. Destabilizujący wpływ owej niepewności modelowania można do pewnego stopnia skompensować poprzez odpowiednie zmniejszenie wartości wzmocnienia k_c regulatora, postępując zgodnie z następującymi prostymi regułami:

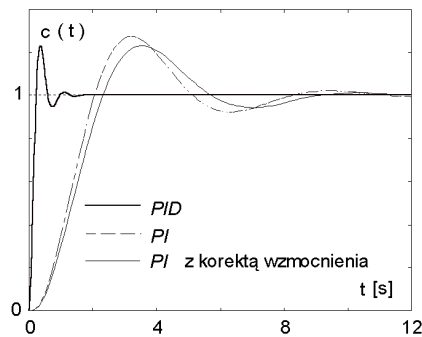
$$k'_c = k_c \left(1 - \frac{\kappa - \bar{\kappa}}{\bar{\kappa}} \right) \quad (3.21)$$

lub

$$k'_c = k_c \left(1 - \frac{M_r - \bar{M}_r}{\bar{M}_r} \right) \quad (3.22)$$

gdzie przez k'_c oznaczono skorygowaną wartość wzmocnienia regulatora PI lub PID , $\bar{\kappa}$ oraz \bar{M}_r dotyczą zakładanych (nominalnych), zaś κ oraz M_r – faktycznie uzyskanych wartości przeregulowania oraz wskaźnika oscylacyjności. Należy jednak pamiętać, że obniżenie wartości wzmocnienia k_c regulatora z

reguły prowadzi do zmniejszenia szybkości regulacji. Rozważmy zatem własności układu ze regulatoriem PI o odpowiednio obniżonej wartości wzmocnienia k_c . Ze wzorów (3.21) oraz (3.22) wynika, że nastawę tę należałoby zmniejszyć odpowiednio o około 20% lub 10%. Przyjmijmy zatem, że skorygowana wartość k'_c wzmocnienia regulatora PI równa się $k'_c = 0.85k_c = 0.6976$. Tak zmodyfikowany układ regulacji charakteryzuje się wskaźnikami: $\kappa = 22.96\%$, $T_\kappa = 3.54\text{ s}$, $T_{s5\%} = 7.33\text{ s}$, $M_r = 1.30$, $\omega_r = 0.815\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ oraz $\omega_{3\text{dB}} = 1.365\text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Na rys. 3.31 pokazano skokowe odpowiedzi rozważanych układów regulacji.



Rys. 3.31. Skokowe odpowiedzi układów regulacji

Opisana metoda nastawiania regulatorów służy zapewnieniu transmitancji $G_{rc}(s)$ projektowanego układu pożądanej – i do pewnego stopnia typowej – postaci, opisaną przyjętą standardową transmitancją wzorcową $G_w(s)$. Uzyskane w ten sposób układy zamknięte, dla różnych modeli $G_p(s)$ obiektów podlegających regulacji, mogą charakteryzować się podobnymi cechami w zakresie śledzenia wielkości zadającej $r(t)$. Analizując transmitancję $G_{ru}(s) = U(s)/R(s)$ (por. rys. 3.30), łatwo stwierdzić, że właściwości toru kształtowania wielkości sterującej $u(t)$ w rozważanych układach regulacji w istotny sposób zależą od modelu obiektu. Zachodzi bowiem

$$G_{ru}(s) = \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

co w naszym przypadku daje $G_{ru}(s) \approx G_w(s)/G_p(s)$. Jak widzimy, trudno tu zatem mówić o jakimś standardowym (niezależnym od modelu obiektu) przebiegu sygnału sterującego. Zachęcamy Czytelnika do zbadania postaci sygnału sterującego występującego w wyżej zaprojektowanym układzie regulacji, a także do samodzielnego sformułowania odpowiednich wniosków na podstawie innych przypadków układów omawianych w niniejszym skrypcie.

Przykład 3.3.4 Dany jest uproszczony model drugiego rzędu pewnego obiektu podlegającego regulacji

$$\tilde{G}_p(s) = \frac{k_p}{(1 + Ts)(1 + T_\Sigma s)}, \quad T \geq T_\Sigma \quad (3.23)$$

gdzie k_p oznacza statyczne wzmocnienie, T jest dominującą stałą czasową, zaś T_Σ oznacza zastępczą stałą czasową, opisującą wpływ wszystkich 'małych' (trudnych do indywidualnej identyfikacji) stałych czasowych tego obiektu. W układzie regulacji z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym zakłada się zastosowanie regulatora *PI* o operatorowej transmitancji

$$G_c(s) = k_c + \frac{k_c}{T_i s}.$$

Przyjmuje się ponadto, że stałą całkowania T_i regulatora *PI* wyznacza się zgodnie z regułą kompensacji: $T_i = T$. Analizując transmitancję $\tilde{G}_0(s) = G_c(s)\tilde{G}_p(s)$ otwartego układu regulacji, obserwuje się tu upraszczanie bieguna odpowiadającego dominującej stałej czasowej T obiektu oraz zera wprowadzanego do transmitancji $\tilde{G}_0(s)$ przez regulator.

Wyznacz zależności, wiążące wzmocnienie k_c regulatora *PI* ze wskaźnikami odpowiedzi skokowej zamkniętego układu regulacji (przeregulowaniem κ , czasem maksimum T_κ i czasem ustalania $T_{s\Delta}$) oraz wskaźnikami amplitudowej charakterystyki transmitancji tego układu (wskaźnikiem oscylacyjności M_r , pulsacją rezonansową ω_r oraz pasmem przenoszenia ω_{3dB}). Przyjmując obiekt o transmitancji

$$G_p(s) = \frac{8}{(1 + 2s)(1 + 0.04s)(1 + 0.008s)} \quad (3.24)$$

oblicz nastawy regulatora *PI*, zapewniające odpowiedzi skokowej zamkniętego układu regulacji przeregulowanie $\kappa_{\%} = 15\%$. Oszacuj czas maksimum T_κ oraz czas ustalania $T_{s2\%}$ tej odpowiedzi, a także wskaźnik oscylacyjności M_r , rezonansową pulsację ω_r oraz pasmo przenoszenia ω_{3dB} tak otrzymanego układu regulacji. Uzyskane oszacowania porównaj z wartościami wyznaczonymi na drodze komputerowej symulacji układu regulacji, w którym występuje 'rzeczywisty' obiekt o transmitancji wysokiego rzędu (3.24).

Rozwiązanie Operatorowa transmitancja $\tilde{G}_0(s)$, będąca uproszczonym modelem rozważanego otwartego układu regulacji, dana jest wzorem

$$\tilde{G}_0(s) = G_c(s)\tilde{G}_p(s) = \frac{k_c(1 + T_i s)}{T_i s} \cdot \frac{k_p}{(1 + Ts)(1 + T_\Sigma s)}.$$

Zgodnie z przyjętą regułą nastawiania regulatora *PI*, transmitancja ta przyjmuje postać

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{k_c k_p}{Ts(1 + T_\Sigma s)}.$$

Uproszczona transmitancja układu zamkniętego przedstawia się zatem jako

$$\tilde{G}(s) = \frac{\tilde{G}_0(s)}{1 + \tilde{G}_0(s)} = \frac{k_c k_p}{k_c k_p + Ts + TT_\Sigma s^2}.$$

Transmitancji tej nadać można standardową formę (3.3), w której

$$\zeta = \frac{1}{2\sqrt{\alpha_1}} \quad \text{oraz} \quad \tau = \frac{T_\Sigma}{\sqrt{\alpha_1}}$$

gdzie

$$\alpha_1 = \frac{k_c k_p T_\Sigma}{T}.$$

Opierając się na informacjach podanych w *dodatku 2*, łatwo wyprowadzamy odpowiednie wzory, wiążące wymienione wskaźniki jakości regulacji (κ , T_κ , $T_{s\Delta}$, M_r , ω_r oraz $\omega_{3\text{dB}}$) z wartością wzmocnienia k_c stosowanego regulatora *PI*. Żądając, aby $0 < \zeta < 1$, otrzymujemy ograniczenie na minimalną wartość tego wzmocnienia

$$k_c > \frac{T}{4k_p T_\Sigma}.$$

Poszukiwane wzory przyjmują postać:

$$\kappa = e^{-\pi\alpha_2}, \quad T_\kappa = 2\pi\alpha_2 T_\Sigma \quad (3.25)$$

$$T_{s\Delta} \leq \bar{T}_{s\Delta} = 2T_\Sigma \ln \left(\frac{2}{\Delta} \frac{\sqrt{\alpha_1}}{\alpha_2} \right) \quad (3.26)$$

$$M_r = 2\alpha_1\alpha_2, \quad \omega_r = \frac{\sqrt{\alpha_3}}{T_\Sigma} \quad (3.27)$$

$$\omega_{3\text{dB}} = \frac{\sqrt{\alpha_3 + \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_3^2}}}{T_\Sigma} \quad (3.28)$$

gdzie

$$\alpha_2 = \frac{1}{\sqrt{4\alpha_1 - 1}} \quad \text{oraz} \quad \alpha_3 = \alpha_1 - \frac{1}{2}.$$

Wzór (3.27) pozostaje słuszny pod warunkiem, że obowiązuje nierówność $\zeta < 1/\sqrt{2}$ (por. *dodatek D.2.2*). Wynika stąd, że omawiany wzór można stosować tylko w przypadku, gdy spełnione jest dodatkowe (silniejsze) ograniczenie na wartość wzmocnienia regulatora

$$k_c > \frac{T}{2k_p T_\Sigma}.$$

Ze wzoru (3.25) wynika, że dla zadanej wartości przeregulowania κ wzmocnienie k_c regulatora *PI* wyznacza się jako

$$k_c = \frac{T(\pi^2 + \ln^2 \kappa)}{4k_c k_p T_\Sigma \ln^2 \kappa}.$$

Przejdźmy do rozwiązania postawionego zadania nastawienia regulatora *PI* dla obiektu o transmitancji (3.24). Transmitancję tę, będącą szeregowym połączeniem trzech członów inercyjnych, przybliżamy następującym modelem o zredukowanym rzędzie (co jest zgodne z wymaganiem sformułowanym we wzorze (3.23)):

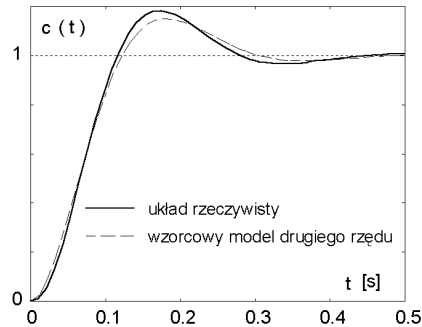
$$\tilde{G}_p(s) = \frac{8}{(1+2s)(1+0.048s)}.$$

Model ten uzyskano, zastępując 'małe' stałe czasowe obiektu (odpowiednio: 0.04 s oraz 0.008 s) wypadkową stałą czasową $T_\Sigma = 0.048$ s.

Poszukiwane nastawy regulatora *PI* przyjmują wartości: $k_c = 4.8727$ oraz $T_i = 2$ s. Wzory (3.25)-(3.28) pozwalają na oszacowanie wskaźników rozważanego układu sterowania: $T_\kappa = 0.182$ s, $T_{s2\%} = 0.390$ s, $M_r = 1$ s⁻¹ oraz $\omega_{3dB} = 25.24$ rad · s⁻¹. Niżej podajemy także wartości wskaźników opisujących 'rzeczywisty' układ regulacji – to znaczy układ, w którym zaprojektowany regulator *PI* zastosowano do sterowania obiektem o transmitancji wysokiego rzędu (3.24): $\kappa\% = 18.26$, $T_\kappa = 0.173$ s, $T_{s2\%} = 0.389$ s, $M_r = 1.191$, $\omega_r = 15.96$ rad · s⁻¹ oraz $\omega_{3dB} = 27.9$ rad · s⁻¹. Porównanie odpowiedzi skokowych układu wzorcowego drugiego rzędu oraz 'rzeczywistego' układu regulacji trzeciego rzędu umożliwiają wykresy dane na rys. 3.32.

Skomentujmy uzyskane wyniki.

- a) W przedstawionej metodzie nastawiania regulatora *PI* zakłada się, że dynamiczne własności zamkniętego układu regulacji są zdeterminowane położeniem pary dominujących sprzężonych zespolonych ($0 < \zeta < 1$) biegunów operatorowej transmitancji tego układu.



Rys. 3.32. Odpowiedzi skokowe układów regulacji

- b) Efektywne zastosowanie metody kompensacyjnego nastawiania regulatora PI ograniczone jest w zasadzie do wieloinercyjnych obiektów dynamicznych, zaś jej dokładność uzależniona jest między innymi od jakości aproksymacji operatorowej transmitancji sterowanego obiektu przez odpowiedni zredukowany model drugiego rzędu (3.23).
- c) Opisane postępowanie może znaleźć zastosowanie także w przypadku syntezy układów sterowania wieloinercyjnymi obiektami za pomocą regulatorów PID .

Przykład 3.3.5 Rozważmy model dynamicznego obiektu w postaci iloczynu operatorowych transmitancji członu inercyjnego oraz idealnego członu opóźniającego

$$G(s) = \frac{e^{-T_0 s}}{1 + Ts}.$$

Zakładając, że znana jest amplitudowa oraz fazowa charakterystyka widmowa transmitancji $G(s)$, podaj przykładową – i możliwie prostą – procedurę identyfikacji parametrów T oraz T_0 rozważanego modelu.

Rozwiązanie Przykładowe rozwiązanie zadania parametrycznej identyfikacji modelu $G(s)$ opiera się na wyznaczeniu pasma przenoszenia badanego obiektu. Rozważając amplitudową charakterystykę odpowiadającą transmitancji $G(s)$, łatwo dochodzimy do wniosku, że stałą czasową T można wyznaczyć ze wzoru

$$T = \frac{1}{\omega_{3dB}}.$$

Odpowiednia charakterystyka fazowa ma postać

$$\arg G(j\omega) = -\arctan(\omega T) - \omega T_0.$$

Zachodzi zatem $\arg G(j\omega_{3\text{dB}}) = -\arctan 1 - T_0/T = -\pi/4 - T_0/T$. Wartość opóźnienia T_0 obliczamy przeto w sposób następujący:

$$T_0 = -T \left(\arg G(j\omega_{3\text{dB}}) + \frac{\pi}{4} \right).$$

Zadanie 3.3.1 Dany jest obiekt regulacji o transmitancji

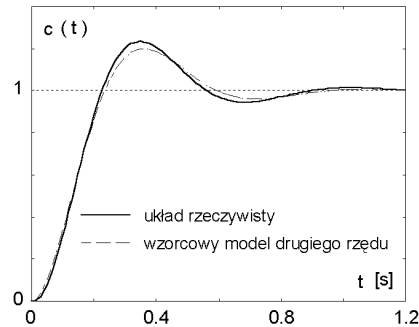
$$G_p(s) = \frac{12}{(1 + 6s)(1 + 2s)(1 + 0.1s)(1 + 0.012s)}.$$

Stosując kompensacyjną regułę nastawiania regulatora *PID* o transmitancji danej wzorem (3.18), należy wyznaczyć takie wartości jego nastaw k_c , T_i oraz T_d , które zapewnią układowi zamkniętemu z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym odpowiedź skokową o przeregulowaniu $\kappa\% \approx 20\%$. Ponadto należy oszacować czas ustalania $T_{s2\%}$ tej odpowiedzi, a także wskaźnik oscylacyjności M_r oraz rezonansową pulsację ω_r transmitancji układu zamkniętego. Oszacowania te należy porównać z wynikami uzyskanymi na drodze symulacji komputerowej.

Wskazówka: jako uproszczony model sterowanego obiektu przyjmuje się transmitancję trzeciego rzędu

$$\tilde{G}_p(s) = \frac{12}{(1 + 6s)(1 + 2s)(1 + 0.112s)}.$$

Odpowiedź Nastawy regulatora *PID* wynoszą: $k_c = 5.3686$, $T_i = 6$ s oraz $T_d = 2$ s. Prowadzi to do następujących oszacowań wskaźników jakości regulacji: $\kappa\% = 20\%$, $T_\kappa = 0.361$ s, $T_{s2\%} = 0.850$ s, $\bar{T}_{s2\%} = 0.902$ s, $M_r = 1.232$, $\omega_r = 7.484$ rad \cdot s $^{-1}$. Wskaźniki uzyskane na drodze symulacji komputerowej mają wartość: $\kappa\% = 23.39\%$, $T_\kappa = 0.348$ s, $T_{s2\%} = 0.829$ s, $M_r = 1.31$ oraz $\omega_r = 8.26$ rad \cdot s $^{-1}$. Na rys. 3.33 pokazano przebieg odpowiedzi skokowej zaprojektowanego układu oraz przebieg związany ze stosowną wzorcową transmitancją drugiego rzędu.



Rys. 3.33. Porównanie odpowiedzi skokowych

Zadanie 3.3.2 Dany jest obiekt opisany transmitancją

$$G_p(s) = \frac{18}{(1 + 5s)(1 + 1.5s)(1 + 0.08s)(1 + 0.03s)}.$$

Posługując się kompensacyjną regułą nastawiania regulatora PI o transmitancji (3.17), wyznacz wartości nastaw k_c oraz T_i tego regulatora, dla których układ regulacji z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym charakteryzuje się wskaźnikiem oscylacyjności $M_r \approx 1.5$. Następnie oszacuj przeregulowanie $\kappa\%$, czas maksimum T_κ oraz czas ustalania $T_{s2\%}$ odpowiedzi skokowej, a także rezonansową pulsację ω_r tak uzyskanego układu. Wyniki oszacowań porównaj z wynikami komputerowej symulacji (dokonaj ewentualnej korekty wzmocnienia regulatora).

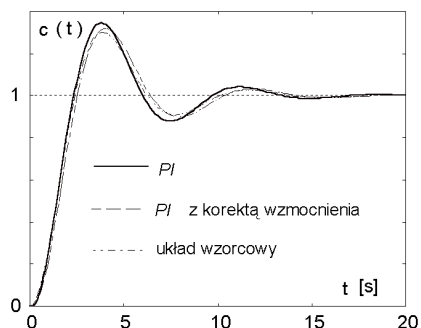
Wskazówka: przyjmij odpowiedni uproszczony model dynamiki sterowanego obiektu.

Odpowiedź Nastawy regulatora PI wynoszą: $k_c = 0.3388$ oraz $T_i = 5$ s. Oszacowania wskaźników jakości regulacji przyjmują postać: $\kappa\% = 30.12\%$, $T_\kappa = 3.864$ s, $T_{s2\%} = 12.54$ s, $\bar{T}_{s2\%} = 12.81$ s, $M_r = 1.5$ oraz $\omega_r = 0.751$ rad \cdot s $^{-1}$.

W wyniku komputerowej symulacji rozważanego układu wyznaczono: $\kappa\% = 34.60\%$, $T_\kappa = 3.80$ s, $T_{s2\%} = 12.55$ s, $M_r = 1.65$ oraz $\omega_r = 0.799$ rad \cdot s $^{-1}$ (por. też rys. 3.34).

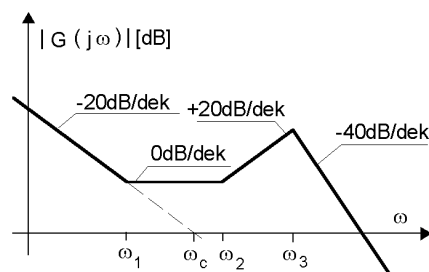
Z analizy powyższych wyników można wnosić, że w układzie zastosowano regulator PI o nieco zawyżonej wartości wzmocnienia k_c . Wniosek ten wynika między innymi z faktu, że rzeczywiste przeregulowanie $\kappa\%$, a także rzeczywisty wskaźnik oscylacyjności M_r , przekraczają wartości odpowiednich oszacowań. Dokonując korekty wzmocnienia regulatora, przy $k'_c = 0.9k_c = 0.3049$, uzyskano układ regulacji o następujących wskaźnikach: $\kappa\% = 31.8\%$,

$T_k = 4.03 \text{ s}$, $T_{s2\%} = 13.07 \text{ s}$, $M_r = 1.55$ oraz $\omega_r = 0.747 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Na rys. 3.34 przedstawiono przebiegi odpowiedzi skokowych obu rozważanych układów regulacji oraz – dla porównania – układu wzorcowego modelowanego transmitancją drugiego rzędu.



Rys. 3.34. Odpowiedzi skokowe układów regulacji

Zadanie 3.3.3 Rysunek 3.35 przedstawia asymptotyczną logarymiczną charakterystykę modułu pewnego układu dynamicznego. Wyznacz na tej podstawie operatorową transmitancję tego układu, zakładając jego minimalnofazowość.



Rys. 3.35. Asymptotyczna charakterystyka amplitudowa

Rozwiązanie Układ opisany jest transmitancją

$$G(s) = \frac{\omega_c \left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right) \left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)}{s \left(1 + \frac{s}{\omega_3}\right)^3}.$$

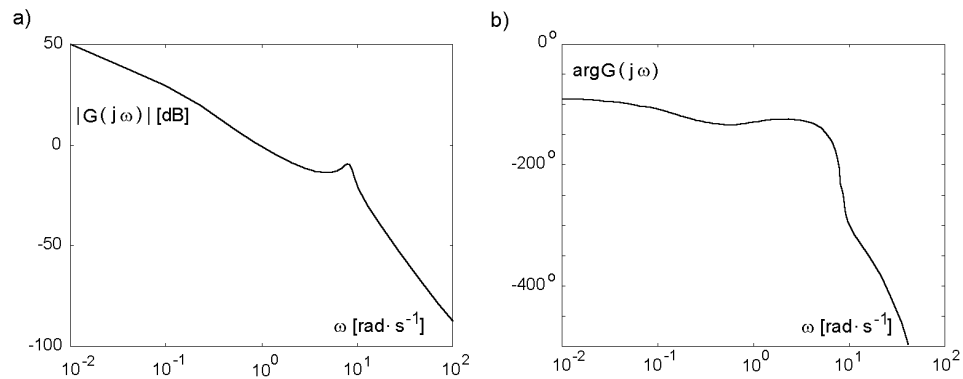
Zadanie 3.3.4 Operatorowa transmitancja nieminimalnofazowego członu dynamicznego dana jest wzorem

$$G(s) = \frac{e^{-T_0 s}}{1 + Ts}$$

Wiadomo, że dla pulsacji $\omega = 2.5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ zachodzi: $|G(j\omega)| = 0.5$ oraz $\arg G(j\omega) = -\pi \text{ rad}$. Wyznacz parametry T oraz T_0 tej transmitancji.

Rozwiązanie $T = 0.693 \text{ s}$ oraz $T_0 = 0.838 \text{ s}$.

Zadanie 3.3.5 Określ operatorową transmitancję $G(s)$ układu, którego charakterystyki Bodego – wyznaczone eksperymentalnie – przedstawiają się jak na rys. 3.36a,b.



Rys. 3.36. Charakterystyki Bodego układu dynamicznego

Rozwiązanie Rozwiązanie ma postać $G(s) = G_0(s) \cdot e^{-0.1s}$, gdzie

$$G_0(s) = \frac{40(1 + s)}{s(0.2 + s)(64 + 2s + s^2)}$$

Istnienie członu opóźniającego oraz jego parametr dają się ustalić poprzez porównanie fazowej charakterystyki transmitancji bez opóźnienia $G_0(s)$ z charakterystyką otrzymaną eksperymentalnie.

Zadanie 3.3.6 Odpowiedź skokową oraz charakterystykę amplitudową pewnego obiektu dynamicznego o operatorowej transmitancji

$$G_p(s) = \frac{1}{(1 + 0.2s)(1 + 0.6s)(1 + 1.4s + 4s^2)}$$

opisują wskaźniki: przeregulowanie $\kappa\% = 29.26\%$, czas maksimum $T_\kappa = 7.58$ s, czasy ustalania $T_{s2\%} = 22.69$ s i $T_{s5\%} = 16.52$ s, wskaźnik oscylacyjności $M_p = 1.47$, rezonansowa pulsacja $\omega_r = 0.428$ rad \cdot s $^{-1}$ oraz pasmo przenoszenia $\omega_{3dB} = 0.684$ rad \cdot s $^{-1}$. Wyznacz następujące zredukowane modele drugiego rzędu tego obiektu:

- model dopasowujący wartości wskaźników M_r oraz ω_r ,
- model dopasowujący wartości wskaźników M_r oraz ω_{3dB} ,
- model zachowujący parę dominujących biegunów transmitancji $G_p(s)$.

Zakłada się przy tym, że wszystkie uproszczone modele posiadają statyczne wzmocnienie równe odpowiedniemu wzmocnieniu modelu pierwotnego $G_p(s)$.

Odpowiedź

- Dane dotyczące zredukowanego modelu dopasowującego wskaźniki M_r oraz ω_r :

$$G_{ra}(s) = \frac{1}{1 + 1.4612s + 4.0033s^2}$$

$$\kappa\% = 29.17\%, T_\kappa = 6.75 \text{ s}, T_{s2\%} = 21.63 \text{ s}, T_{s5\%} = 15.65 \text{ s}, M_r = 1.47, \omega_r = 0.428 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \omega_{3dB} = 0.702 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- Dane dotyczące zredukowanego modelu dopasowującego wskaźniki M_r oraz ω_{3dB} :

$$G_{rb}(s) = \frac{1}{1 + 1.499s + 4.21345s^2}$$

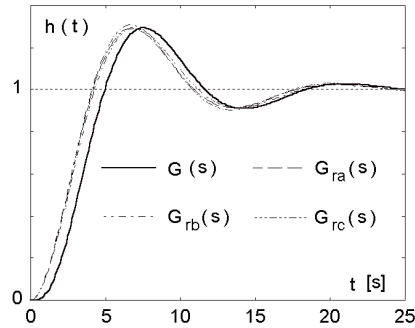
$$\kappa\% = 29.17\%, T_\kappa = 6.93 \text{ s}, T_{s2\%} = 22.19 \text{ s}, T_{s5\%} = 16.06 \text{ s}, M_r = 1.47, \omega_r = 0.417 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \omega_{3dB} = 0.684 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- Dane dotyczące modelu zachowującego dominujące bieguny transmitancji $G_p(s)$:

$$G_{rc}(s) = \frac{1}{1 + 1.4s + 4s^2}$$

$$\kappa\% = 30.92\%, T_\kappa = 6.69 \text{ s}, T_{s2\%} = 21.96 \text{ s}, T_{s5\%} = 15.76 \text{ s}, M_r = 1.52, \omega_r = 0.434 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \omega_{3dB} = 0.709 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Porównanie odpowiedzi skokowej rozważanego obiektu oraz odpowiedzi skokowych wszystkich badanych uproszczonych modeli tego obiektu przedstawiono na rys. 3.37.



Rys. 3.37. Porównanie odpowiedzi skokowych obiektu i jego uproszczonych modeli

Zadanie 3.3.7 Człon opóźniający $G(s) = e^{-T_0 s}$ przybliżamy członem przesuwnika fazowego

$$G_a(s) = \frac{1 - \frac{T_0}{2}s}{1 + \frac{T_0}{2}s}.$$

Wyznacz błąd takiego przybliżenia, rozważając charakterystykę amplitudową oraz fazową transmitancji różnicowej $G(s) - G_a(s)$. Dla jakich pulsacji błąd aproksymacji charakterystyki fazowej członu opóźniającego nie przekracza $-\pi/4$?

Odpowiedź Błąd aproksymacji charakterystyki amplitudowej członu opóźniającego przez rozważany człon wymierny pierwszego rzędu ma wartość zero, zaś błąd aproksymacji charakterystyki fazowej członu opóźniającego nie jest ograniczony. Zakładane górne ograniczenie błędu przybliżenia fazy osiąga się dla $\omega \leq 2.6247/T_0$.

Rozdział 4

Badanie stabilności liniowych układów sterowania. Ocena ustalonych uchybów. Odporna stabilność.

Niniejszy rozdział dotyczy trzech ważnych zagadnień związanych z analizą oraz syntezą układów automatycznego sterowania (regulacji). W pierwszej kolejności zajmujemy się badaniem stabilności w sensie *BIBO* (*Bounded Input Bounded Output*) liniowych układów dynamicznych opisanych operatorowymi transmitancjami, w tym układów sterowania z ujemnym sprzężeniem zwrotnym. Rozważamy zastosowanie algebraicznych oraz częstotliwościowych kryteriów rozstrzygania o takiej stabilności. Następnie przechodzimy do oceny ustalonych uchybów sterowania. W tym celu wykorzystujemy uchybowe transmitancje danego układu, a także analizujemy własności takich transmitancji. Definiując typ astatyzmu badanego układu sterowania, formułujemy stosowne wnioski o postaci ustalonych uchybów dla typowych wielomianowych sygnałów pobudzających. Wreszcie, w rozdziale tym zamieszczamy wstępne uwagi o sterowaniu odpornym w warunkach niepewności nominalnego modelu sterowanego obiektu.

Niech \mathcal{RH}_∞ oznacza przestrzeń wymiernych z rzeczywistymi współczynnikami funkcji zmiennej zespolonej s , analitycznych i ograniczonych w prawej otwartej półpłaszczyźnie. Normę w przestrzeni \mathcal{RH}_∞ definiuje się jako

$$\|G\|_\infty = \sup_{\operatorname{Re}(s)>0} |G(s)| = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega)|.$$

Funkcja $G(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ musi być zatem funkcją właściwą i nie może posiadać biegunów w prawej domkniętej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s . Zachodzi ponadto $\mathcal{RH}_\infty \subset \mathcal{RL}_\infty$, gdzie \mathcal{RL}_∞ to przestrzeń wymiernych funkcji o rzeczywistych współczynnikach i ograniczonych na osi urojonej $j\mathbb{R}$. Symbole \mathcal{L}_∞ oraz \mathcal{H}_∞ odnoszą się do odpowiednich szerszych klas funkcji, dla których nie obowiązuje założenie o wymiernej postaci ich elementów.

4.1 Algebraiczne i częstotliwościowe metody badania stabilności

Przykład 4.1.1 Na podstawie kryterium Routha-Hurwitza, określ liczbę pierwiastków następującego równania

$$W(s) = 48 + 28s - 56s^2 - 35s^3 + 7s^4 + 7s^5 + s^6 = 0 \quad (4.1)$$

leżących w prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej.

Rozwiązanie Tablica Routha, odpowiadająca (4.1), ma postać

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^6 & 1 & 7 & -56 & 48 \\
 s^5 & 7 & -35 & 28 & \\
 s^4 & 12 & -60 & 48 & \\
 s^3 & 48 \rightarrow 0 & -120 \rightarrow 0 & & \\
 s^2 & -30 & 48 & & \\
 s^1 & -43.2 & 0 & & \\
 s^0 & 48 & & &
 \end{array} \quad (4.2)$$

W tablicy tej pojawia się wiersz złożony tylko z zerowych elementów (wiersz ten odpowiada nieparzystej trzeciej potęgze zmiennej zespolonej s). W takim przypadku zerowy wiersz tablicy zastąpić należy wierszem utworzonym ze współczynników różniczkowanego pomocniczego wielomianu $P(s)$, który tworzy się na podstawie wiersza bezpośrednio poprzedzającego rozważany zerowy wiersz. Zgodnie z kryterium Routha-Hurwitza, pomocniczy wielomian ma postać $P(s) = 48 - 60s^2 + 12s^4$, a zatem elementy wiersza zastępującego zerowy wiersz tablicy (4.2) oblicza się w następujący sposób: $dP(s)/ds = -120s + 48s^3$. Po dokonaniu odpowiedniej zamiany, wypełnianie tablicy Routha jest kontynuowane. Analiza liczby zmian znaku elementów pierwszej kolumny tej tablicy wskazuje, iż równanie (4.1) ma dwa pierwiastki leżące w prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej. Pomocniczy wielomian $P(s)$, wykorzystywany przy opisanej rekonstrukcji elementów zerowego wiersza tablicy Routha, jest zawsze wielomianem, w którym

zespolona zmienna s występuje tylko w parzystych potęgach. Oznacza to, że pierwiastki tego pomocniczego wielomianu, będące także pierwiastkami 'pierwotnego' wielomianu $W(s)$, rozmieszczone są na płaszczyźnie zespolonej symetrycznie względem osi urojonej. Pierwiastki takie mogą zatem występować w parach (pierwiastki rzeczywiste lub urojone), bądź też w kwartetach (dwie pary pierwiastków sprzężonych zespolonych o niezerowych częściach rzeczywistych).

Przykład 4.1.2 Charakterystyczny wielomian pewnego układu dynamicznego dany jest wzorem

$$W(s) = 2 + 5s + 9s^2 + 10s^3 + 3s^4 + 3s^5.$$

Stosując kryterium Routha-Hurwitza, zbadaj liczbę pierwiastków tego wielomianu, leżących w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s .

Rozwiązanie Tablica Routha przedstawia się tu następująco:

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^5 & 3 & 10 & 5 \\
 s^4 & 3 & 9 & 2 \\
 s^3 & 1 & 3 & \\
 s^2 & \varepsilon \rightarrow 0 & 2 & \\
 s^1 & -\frac{2}{\varepsilon} & & \\
 s^0 & 2 & &
 \end{array} \tag{4.3}$$

W tablicy tej wystąpił niezerowy wiersz (odpowiadający drugiej potędze zespolonej zmiennej s) o zerowym pierwszym elemencie. W takim przypadku element ów zastąpić należy 'małą' dodatnią liczbą ε i kontynuować obliczenia w celu określenia wartości dalszych elementów tablicy (niektóre z tych elementów będą teraz funkcjami parametru ε). Z liczby zmian znaku elementów pierwszej kolumny tak uzyskanej tablicy Routha wynika, ile pierwiastków równania $W(s) = 0$ leży w prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej. Ze wzoru (4.3) wnioskujemy zatem, że równanie to posiada dwa takie pierwiastki.

Przykład 4.1.3 Stosując kryterium Hurwitza, zbadaj stabilność układu dynamicznego, którego wielomian charakterystyczny ma postać

$$W(s) = 3 + 4s + 3s^2 + 2s^3 + s^4. \tag{4.4}$$

Rozwiązanie Kryterium Hurwitza pozwala na stwierdzenie, czy moniczny wielomian $W(s) = a_0 + a_1s + a_2s^2 + \dots + a_{n-1}s^{n-1} + s^n$ o dodatnich współczynnikach a_i , $i = 0, 1, \dots, n-1$, $a_n = 1$, posiada pierwiastki w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s . W tym celu definiuje się macierz Hurwitza $H_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$, daną wzorem

$$H_n = \begin{bmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \cdots & \cdots & 0 \\ 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 1 & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \ddots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & a_0 \end{bmatrix}. \quad (4.5)$$

Koniecznym i wystarczającym warunkiem, aby wszystkie pierwiastki wielomianu $W(s)$ stopnia $\deg W(s) = n$ leżały w lewej otwartej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s jest spełnienie nierówności $\Delta_i > 0$ dla $i = 1, \dots, n$, gdzie Δ_i to minory główne macierzy Hurwitza H_n . Jeżeli $\Delta_i \neq 0$ dla $i = 1, \dots, n$, to wielomian $W(s)$ ma m pierwiastków w otwartej prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s , gdzie m oznacza liczbę zmian znaku elementów ciągu

$$\left\{ \Delta_0, \frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \dots, \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}} \right\}$$

przy czym $\Delta_0 = a_n = 1$.

W naszym przypadku, wielomianowi (4.4) przyporządkowujemy macierz Hurwitza

$$H_4 = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Minory główne tej macierzy to: $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 2$, $\Delta_3 = -4$ oraz $\Delta_4 = -12$. Ponieważ Δ_3 oraz Δ_4 są ujemne, rozważany wielomian ma pierwiastki w otwartej prawej półpłaszczyźnie zespolonej. Liczba zmian znaku ciągu

$$\left\{ \Delta_0, \frac{\Delta_1}{\Delta_0}, \frac{\Delta_2}{\Delta_1}, \frac{\Delta_3}{\Delta_2}, \frac{\Delta_4}{\Delta_3} \right\} = \left\{ 1, \frac{2}{1}, \frac{2}{2}, \frac{-4}{2}, \frac{-12}{-8} \right\}$$

świadczy, że są dwa takie pierwiastki.

Przykład 4.1.4 Otwarty układ regulacji opisany jest transmitancją

$$G_0(s) = \frac{k_0}{(-1+s)(3+s)(4+s)}, \quad k_0 > 0. \quad (4.6)$$

Wykreśl charakterystykę Nyquista odpowiadającą tej transmitancji. Kładąc $k_0 = 20$, zbadaj czy układ po zamknięciu pętli jednostkowego ujemnego sprzężenia zwrotnego będzie układem stabilnym. W przypadku odpowiedzi pozytywnej, oblicz zapas wzmocnienia układu zamkniętego.

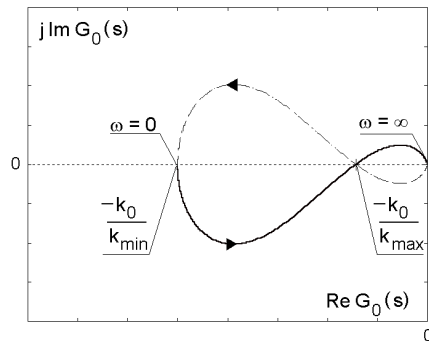
Rozwiązanie Argument widmowej transmitancji $G_0(j\omega)$ dany jest wzorem

$$\arg G_0(j\omega) = -180^\circ + \arctan \omega - \arctan \left(\frac{\omega}{3} \right) - \arctan \left(\frac{\omega}{4} \right).$$

Mamy zatem $\arg G_0(j\omega)|_{\omega=0} = -180^\circ$ oraz $\arg G_0(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = -270^\circ$. Ponadto, dla $\omega \in O^+(0)$ obowiązuje zależność

$$\begin{aligned} \arg G_0(j\omega) &= -180^\circ + \arctan \omega - \arctan \left(\frac{7\omega}{12 - \omega^2} \right) \\ &= -180^\circ + \arctan \left(\frac{\omega(5 - \omega^2)}{12 + 6\omega^2} \right) \end{aligned}$$

z której wynika, że $\arg G_0(j\omega)|_{\omega \in (0, \sqrt{5})} > -180^\circ$. Na podstawie powyższych wzorów oszacować można przebieg charakterystyki Nyquista rozważanego otwartego układu regulacji (rys. 4.1).



Rys. 4.1. Charakterystyka Nyquista otwartego układu regulacji

Aby odpowiedzieć na pytanie o stabilność układu zamkniętego, należy rozważyć położenie punktów $-k_0/k_{\min}$ oraz $-k_0/k_{\max}$ na ujemnej rzeczywistej półosi płaszczyzny zespolonej w stosunku do położenia punktu kontrolnego $(-1, j0)$.

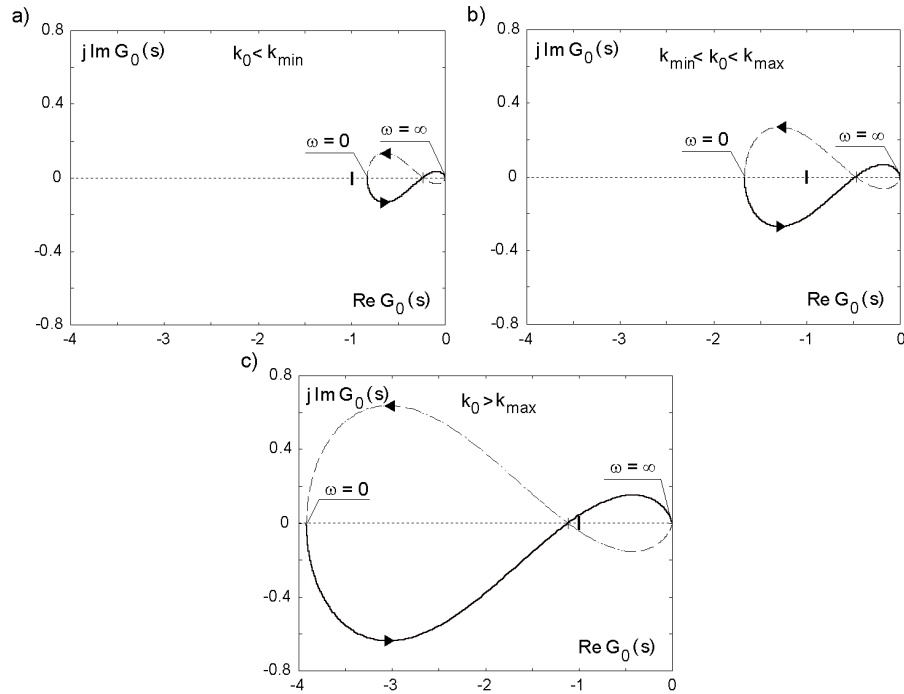
Możliwe są trzy przypadki:

- $k_0 < k_{\min}$, któremu odpowiada $N = 0$ (rys. 4.2a),
- $k_{\min} < k_0 < k_{\max}$, dla którego zachodzi $N = -1$ (rys. 4.2b),
- $k_0 > k_{\max}$, w którym przyjmujemy $N = 1$ (rys. 4.2c),

gdzie

$$k_{\min} = \frac{1}{|G_0(j\omega)|} \Big|_{k_0=1, \omega=0} = 12 \quad \text{oraz} \quad k_{\max} = \frac{1}{|G_0(j\omega)|} \Big|_{k_0=1, \omega=\sqrt{5}} = 42$$

zaś N określa, ile razy rozważana charakterystyka obchodzi zgodnie z ruchem wskazówek zegara kontrolny punkt $(-1, j0)$, gdy pulsacja ω zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$.



Rys. 4.2. Charakterystyki Nyquista układu otwartego

Ponieważ operatorowa transmitancja rozważanego otwartego układu (4.6) ma jeden biegun w prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej ($P = 1$), zatem tylko drugi z powyższych przypadków (to znaczy, gdy $N = -1$) odpowiada stabilnemu układowi zamkniętemu (liczba biegunów transmitancji zamkniętego układu, leżących w prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej wynosi $Z = N + P = -1 + 1 = 0$). W pierwszym przypadku ($N = 0$) transmitancja zamkniętego układu będzie miała jeden biegun w prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej ($Z = N + P = 0 + 1 = 1$), zaś w przypadku trzecim ($N = 1$) – będą dwa takie bieguny ($Z = N + P = 1 + 1 = 2$). A zatem przy $k_0 = 20$ (czyli dla $k_{\min} < k_0 < k_{\max}$ – co odpowiada drugiemu przypadkowi) rozważany układ regulacji będzie układem stabilnym w sensie *BIBO*. Z rys. 4.2 wynika, że w tym przypadku można mówić o dwóch zapasach wzmocnienia

$$M_g^+ = 20 \log \left(\frac{k_{\max}}{k_0} \right) = 6.44 \text{ dB} \quad \text{oraz} \quad M_g^- = 20 \log \left(\frac{k_0}{k_{\min}} \right) = 4.44 \text{ dB}.$$

Zapas M_g^+ jest miarą odporności stabilności zamkniętego układu regulacji na wzrost wartości parametru k_0 układu otwartego. Z kolei, zapas M_g^- mówi o odporności stabilności zamkniętego układu w przypadku spadku wartości tego parametru.

Przykład 4.1.5 Stosując kryterium Nyquista, zbadaj stabilność zamkniętego układu regulacji z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym, jeżeli wiadomo, że transmitancja toru głównego tego układu ma postać

$$G_0(s) = \frac{k(1 + T_0s)}{(-1 + T_1s)(1 + T_2s)(1 + T_3s)} \quad (4.7)$$

przy czym $k = 10$, $T_0 = 0.05 \text{ s}$, $T_1 = 0.1 \text{ s}$, $T_2 = 0.02 \text{ s}$ oraz $T_3 = 0.25 \text{ s}$.

Rozwiązanie Zbadajmy przebieg charakterystyki Nyquista rozważanego układu otwartego. Mamy

$$G_0(j\omega) = \frac{k(1 + j\omega T_0)}{(-1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)} = U(\omega) + jV(\omega)$$

gdzie

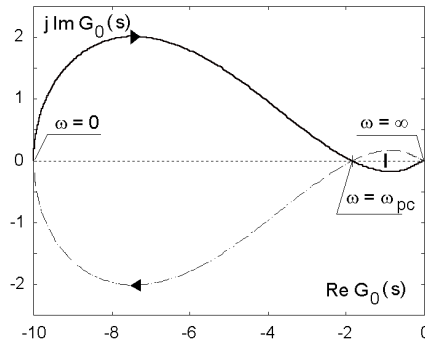
$$U(\omega) = \frac{-10 - 3.05 \cdot 10^{-1} \cdot \omega^2 - 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot \omega^4}{1 + 7.29 \cdot 10^{-2} \cdot \omega^2 + 6.54 \cdot 10^{-4} \cdot \omega^4 + 2.5 \cdot 10^{-7} \cdot \omega^6} \quad (4.8)$$

$$V(\omega) = \frac{\omega(1.2 - 6 \cdot 10^{-3} \cdot \omega^2)}{1 + 7.29 \cdot 10^{-2} \cdot \omega^2 + 6.54 \cdot 10^{-4} \cdot \omega^4 + 2.5 \cdot 10^{-7} \cdot \omega^6}. \quad (4.9)$$

Ze wzorów (4.8) i (4.9) wynika co następuje:

$$\begin{aligned} \omega = 0 & : U(\omega) = -10, \quad V(\omega) = 0 \\ 0 \leq \omega < \infty & : U(\omega) < 0 \\ \omega \rightarrow \infty & : U(\omega) \rightarrow 0, \quad V(\omega) \rightarrow 0 \\ \omega = \omega_{pc} = \sqrt{\frac{1.2}{0.006}} = \sqrt{200} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} & : U(\omega) = -1.85185, \quad V(\omega) = 0 \\ 0 < \omega < \omega_{pc} & : V(\omega) > 0 \\ \omega_{pc} < \omega < \infty & : V(\omega) < 0. \end{aligned}$$

Powyższe dane pozwalają wykreślić charakterystykę Nyquista (rys. 4.3).



Rys. 4.3. Charakterystyka Nyquista otwartego układu regulacji

W myśl podstawowej reguły związanej z kryterium Nyquista mamy $Z = N + P$, gdzie: Z – liczba biegunów zamkniętego układu leżących w prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej, N – liczba okrążeń punktu kontrolnego $(-1, j0)$ zgodnych z ruchem wskazówek zegara przy poruszaniu się wzdłuż charakterystyki Nyquista dla pulsacji ω zmieniającej się od $-\infty$ do $+\infty$, P – liczba biegunów układu otwartego, należących do prawej półpłaszczyzny płaszczyzny zespolonej. Ze wzoru (4.7) wynika, że jeden biegun transmitancji badanego układu otwartego znajduje się w prawej półpłaszczyźnie zespolonej ($P = 1$). Na podstawie rys. 4.3 otrzymujemy $N = -1$. Ponieważ $Z = 0$, zatem rozważany układ zamknięty jest stabilny.

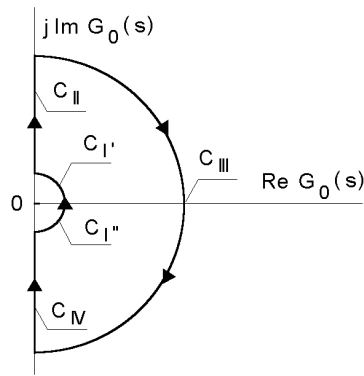
Przykład 4.1.6 Operatorowa transmitancja otwartego układu regulacji z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym dana jest wzorem

$$G_0(s) = \frac{k}{s^2(3+s)}, \quad k > 0. \quad (4.10)$$

Korzystając z kryterium Nyquista, określ liczbę biegunów transmitancji odpowiedniego układu zamkniętego, leżących w prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej.

Rozwiązanie Transmitancja (4.10) posiada podwójny biegun dla $s = 0$. Kontur Cauchy'ego \mathcal{C} , stosowny dla tego przypadku, przedstawiono na rys. 4.4, wyróżniając pięć fragmentów:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{I'} &: s = \rho e^{j\varphi}, \rho > 0, 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ \\
 \mathcal{C}_{II} &: s = j\omega, \rho < \omega < \infty, \rho > 0 \\
 \mathcal{C}_{III} &: s = \pm j\infty \\
 \mathcal{C}_{IV} &: s = j\omega, -\infty < \omega < -\rho, \rho > 0 \\
 \mathcal{C}_{I''} &: s = \rho e^{j\varphi}, \rho > 0, -90^\circ \leq \varphi < 0^\circ.
 \end{aligned} \tag{4.11}$$



Rys. 4.4. Kontur Cauchy'ego w przypadku transmitancji z biegunem w zerze

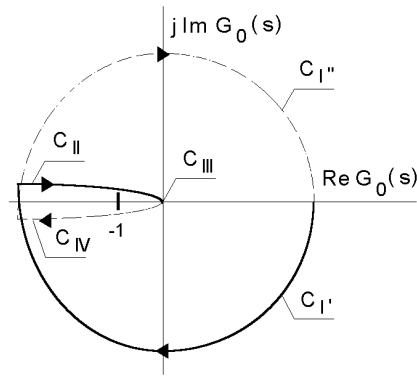
Odwzorowanie $G_0 : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $s \mapsto G_0(s)$, przy $\rho \rightarrow 0^+$, wyznacza charakterystykę Nyquista układu otwartego (4.10). Dla $s \in \mathcal{C}_{I'}$ mamy

$$G_0(s)|_{s \in \mathcal{C}_{I'}} = \frac{k}{\rho^2 e^{j2\varphi} (3 + \rho e^{j\varphi})}$$

a zatem dla dostatecznie 'małej' wartości promienia $\rho > 0$

$$\begin{aligned}
 G_0(s)|_{s=\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=0^\circ} &\approx \frac{k}{3\rho^2} > 1 \\
 |G_0(s)|_{s=\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=90^\circ} &\approx \frac{k}{3\rho^2} > 1 \\
 \arg G_0(s)|_{s=\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=90^\circ} &= -180^\circ - \arctan\left(\frac{\rho}{3}\right).
 \end{aligned}$$

Dla $s = \rho e^{j90^\circ}$ przy $\rho > 0$ zachodzi $\arg G_0(s) < -180^\circ$. Na tej podstawie wnioskujemy, że charakterystyka Nyquista układu (4.10) przechodzi do drugiej ćwiartki płaszczyzny zmiennej zespolonej s . Gdy $s \in \mathcal{C}_{II}$, wtedy $\arg G_0(s)|_{s \in \mathcal{C}_{II}} = -180^\circ - \arctan(\omega/3)$. Dla $s \in \mathcal{C}_{II}$ zachodzi $\lim_{s \rightarrow \infty} |G_0(s)| = 0$. Przebieg charakterystyki Nyquista dla $s \in \mathcal{C}_{I'} \cup \mathcal{C}_{II} \cup \mathcal{C}_{III}$ oraz pewnego promienia $\rho > 0$ pokazano na rys. 4.5. Symetryczny fragment tej charakterystyki, odpowiadający $s \in \mathcal{C}_{IV} \cup \mathcal{C}_{I''}$, zaznaczono na rys. 4.5 przerywaną linią. Jak widzimy, liczba okrążeń kontrolnego punktu $(-1, j0)$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara wynosi $N = 2$. Ponieważ badany układ otwarty nie posiada biegunów w prawej otwartej półpłaszczyźnie zespolonej ($P = 0$), funkcja $G_0(s)$ jest analityczna dla s należących do wnętrza $\text{Int } \mathcal{C}$ konturu Cauchy'ego \mathcal{C} , zatem liczba biegunów transmitancji układu zamkniętego w prawej otwartej półpłaszczyźnie zespolonej wynosi $Z = N + P = 2$.



Rys. 4.5. Charakterystyka Nyquista otwartego układu z podwójnym biegunem w zerze

Przykład 4.1.7 Wykreśl charakterystykę Nyquista transmitancji

$$G_0(s) = \frac{k(2+s)}{s(-1+s)}, \quad k > 0. \quad (4.12)$$

pewnego układu otwartego. Dla jakich k układ zamknięty z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym będzie układem stabilnym?

Rozwiązanie Transmitancja (4.12) ma biegun dla $s = 0$. Kontur Cauchy'ego \mathcal{C} dla tego przypadku ma postać określoną wzorem (4.11) (zob. rys. 4.4). Odwzorowanie $G_0 : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $s \mapsto G_0(s)$, przy $\rho \rightarrow 0^+$, wyznacza przebieg charakterystyki Nyquista tego układu. Dla $s \in \mathcal{C}_{I'}$ zachodzi

$$G_0(s)|_{s \in \mathcal{C}_{I'}} = \frac{k(2 + \rho e^{j\varphi})}{\rho e^{j\varphi}(-1 + \rho e^{j\varphi})}$$

a zatem, gdy tylko promień $\rho > 0$ jest dostatecznie 'mały', mamy

$$G_0(s)|_{s=\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=0^\circ} \approx -\frac{2k}{\rho} \quad (4.13)$$

$$|G_0(s)|_{s=\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=90^\circ} \approx \frac{2k}{\rho}$$

$$\arg G_0(s)|_{s=\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=90^\circ} = -270^\circ + \arctan\left(\frac{\rho}{2}\right) + \arctan \rho. \quad (4.14)$$

Dla $s \in \mathcal{C}_{II}$ mamy

$$\arg G_0(s)|_{s \in \mathcal{C}_{II}} = \begin{cases} -270^\circ + \arctan\left(\frac{3\omega}{2-\omega^2}\right) & \text{dla } \omega < \sqrt{2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ -180^\circ & \text{dla } \omega = \sqrt{2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ -90^\circ + \arctan\left(\frac{3\omega}{2-\omega^2}\right) & \text{dla } \omega > \sqrt{2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}. \end{cases} \quad (4.15)$$

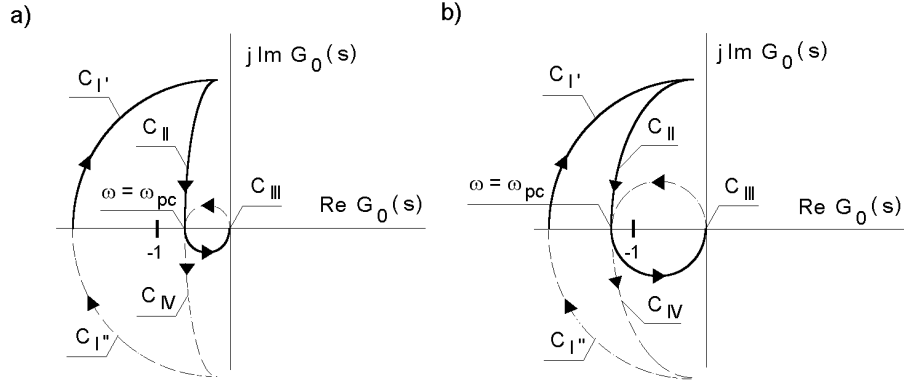
Z kolei, dla $s \in \mathcal{C}_{III}$ zachodzi $\lim_{s \rightarrow \infty} |G_0(s)| = 0$.

Ze wzorów (4.13) oraz (4.14) wynika, że dla $s \in \mathcal{C}_{I'}$ charakterystyka Nyquista rozważanego układu otwartego (4.12) zawiera się tylko w drugiej ćwiartce płaszczyzny zespolonej. Z kolei, na podstawie wzoru (4.15) wnioskujemy, że przy pulsacji $\omega = \omega_{pc} = \sqrt{2} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ charakterystyka Nyquista przechodzi do trzeciej ćwiartki płaszczyzny zespolonej. Jak łatwo sprawdzić, dla $\omega = \omega_{pc}$ zachodzi $G_0(j\omega_{pc}) = -k$.

Powyższe obliczenia pozwalają na wykreślenie charakterystyki Nyquista transmitancji (4.12) dla $s \in \mathcal{C}_{I'} \cup \mathcal{C}_{II} \cup \mathcal{C}_{III}$ i pewnego promienia $\rho > 0$. Przebieg ten, uzupełniony symetrycznym fragmentem odpowiadającym $s \in \mathcal{C}_{IV} \cup \mathcal{C}_{I''}$ (linia przerywana) dano na rys. 4.6a,b. Rys. 4.6a dotyczy przypadku, w którym $k < 1$, zaś rys. 4.6b – przypadku $k > 1$. Tylko drugi z tych przypadków odpowiada stabilnemu układowi zamkniętemu.

Transmitancja (4.12) posiada jeden biegun $s = 1$ w otwartej prawej półpłaszczyźnie. Mamy zatem $P = 1$.

W pierwszym z wyróżnionych przypadków, przy $k < 1$, charakterystyka Nyquista otwartego układu (4.12) okrąży jeden raz punkt kontrolny $(-1, j0)$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara ($N = 1$, rys. 4.6a). Odpowiedni układ zamknięty jest zatem niestabilny i jego transmitancja ma dwa bieguny w prawej półpłaszczyźnie zespolonej ($Z = N + P = 2$).



Rys. 4.6. Charakterystyka Nyquista niestabilnego układu otwartego ($P = 1$), który po zamknięciu pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego: **a)** pozostaje niestabilny ($N = 1$, $Z = N + P = 2$), **b)** jest stabilny ($N = -1$, $Z = N + P = 0$)

W drugim przypadku, to znaczy przy $k > 1$, charakterystyka Nyquista otwartego układu (4.12) jednokrotnie obiega punkt $(-1, j0)$ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara ($N = -1$, rys. 4.6b) – co oznacza, że dla tego przypadku zamknięty układ jest stabilny ($Z = N + P = 0$).

Przykład 4.1.8 Operatorowa transmitancja otwartego układu regulacji z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym dana jest wzorem

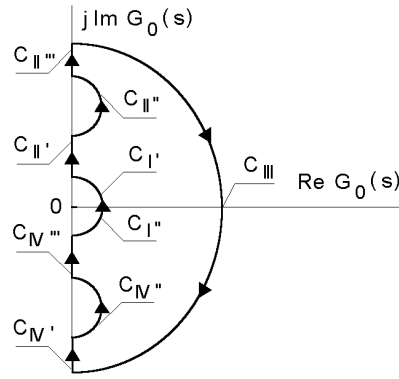
$$G_0(s) = \frac{k(1+s)(3+s)}{s(2+s)(4+s^2)}, \quad k > 0. \quad (4.16)$$

Korzystając z kryterium Nyquista, określ liczbę biegunów transmitancji odpowiedniego układu zamkniętego, leżących w prawej półpłaszczyźnie.

Rozwiązanie Transmitancja $G_0(s)$ posiada trzy bieguny na osi urojonej: biegun w zerze ($s = 0$) oraz parę biegunów sprzężonych urojonych ($s = \pm j2$). Kontur Cauchy'ego \mathcal{C} stosowny dla tego przypadku przedstawiono na rys. 4.7, wyróżniając dziewięć fragmentów:

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{I'} &: s = \rho e^{j\varphi}, \rho > 0, 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ \\ \mathcal{C}_{II'} &: s = j\omega, \rho < \omega < 2 - \rho, \rho > 0 \\ \mathcal{C}_{II''} &: s = j2 + \rho e^{j\varphi}, \rho > 0, -90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ \\ \mathcal{C}_{III''} &: s = j\omega, 2 + \rho < \omega < \infty, \rho > 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{III} &: s = \pm j\infty \\
\mathcal{C}_{IV'} &: s = j\omega, -\infty < \omega < -2 - \rho, \rho > 0 \\
\mathcal{C}_{IV''} &: s = -j2 + \rho e^{j\varphi}, \rho > 0, -90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ \\
\mathcal{C}_{IV'''} &: s = j\omega, -2 + \rho < \omega < -\rho, \rho > 0 \\
\mathcal{C}_{I''} &: s = \rho e^{j\varphi}, \rho > 0, -90^\circ \leq \varphi < 0^\circ.
\end{aligned}$$



Rys. 4.7. Kontur Cauchy'ego w przypadku transmitancji z biegunem w zerze i parą biegunów urojonych

Odwzorowanie $G_0 : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $s \mapsto G_0(s)$, przy $\rho \rightarrow 0^+$, wyznacza charakterystykę Nyquista układu otwartego (4.16). Dla $s \in \mathcal{C}_{I'}$ mamy

$$G_0(s)|_{s \in \mathcal{C}_{I'}} = \frac{k(1 + \rho e^{j\varphi})(3 + \rho e^{j\varphi})}{\rho e^{j\varphi}(2 + \rho e^{j\varphi})(4 + \rho^2 e^{j2\varphi})}$$

a zatem dla dostatecznie 'małej' wartości promienia $\rho > 0$ obserwujemy, że:

$$\begin{aligned}
|G_0(s)|_{s=\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=0^\circ} &\approx \frac{3k}{8\rho} > 1 \\
|G_0(s)|_{s=\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=90^\circ} &\approx \frac{3k}{8\rho} > 1 \\
\arg G_0(s)|_{s=\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=90^\circ} &= -90^\circ + \arctan \rho > -90^\circ.
\end{aligned}$$

Z ostatniego wzoru wynika, że dla $s \in \mathcal{C}_{I'}$ charakterystyka Nyquista pozostaje w czwartej ćwiartce płaszczyzny zespolonej. Dla $s \in \mathcal{C}_{I''}$ zachodzi

$$G_0(s)|_{s \in \mathcal{C}_{I''}} = \frac{k(1 + j\omega)(3 + j\omega)}{j\omega(2 + j\omega)(4 - \omega^2)}$$

a zatem

$$\arg G_0(s)|_{s \in \mathcal{C}_{II'}} = -90^\circ + \arctan \omega + \arctan \left(\frac{\omega}{3} \right) - \arctan \left(\frac{\omega}{2} \right) < \varphi_0$$

gdzie $\varphi_0 = -90^\circ + \arctan 2 + \arctan(2/3) - \arctan 1 = -37.875^\circ$. Z kolei, dla $s \in \mathcal{C}_{III''}$ obowiązują zależności:

$$G_0(s)|_{s \in \mathcal{C}_{III''}} = \frac{k(1 + j2 + \rho e^{j\varphi})(3 + j2 + \rho e^{j\varphi})}{(j2 + \rho e^{j\varphi})(2 + j2 + \rho e^{j\varphi})(4 + (j2 + \rho e^{j\varphi})^2)}$$

$$|G_0(s)|_{s=j2+\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=\pm 90^\circ} \approx \frac{k}{16\rho} \sqrt{\frac{65}{2}} > 1$$

$$\arg G_0(s)|_{s=j2+\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=-90^\circ}$$

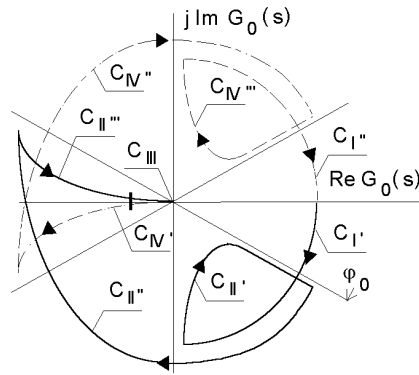
$$= -90^\circ + \arctan(2 - \rho) + \arctan \left(\frac{2-\rho}{3} \right) - \arctan \left(\frac{2-\rho}{2} \right) < \varphi_0$$

$$\arg G_0(s)|_{s=j2+\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=90^\circ}$$

$$= -90^\circ + \arctan(2 + \rho) + \arctan \left(\frac{2+\rho}{3} \right) - \arctan \left(\frac{2+\rho}{2} \right) - 180^\circ$$

$$> -180^\circ + \varphi_0.$$

Dla $s \in \mathcal{C}_{III}$ zachodzi $\lim_{s \rightarrow \infty} |G_0(s)| = 0$. Na tej podstawie wykreślono charakterystykę Nyquista dla $s \in \mathcal{C}_I' \cup \mathcal{C}_{II}' \cup \mathcal{C}_{III}'' \cup \mathcal{C}_{III}''' \cup \mathcal{C}_{III}$, $s \in \mathcal{C}_{IV}' \cup \mathcal{C}_{IV}'' \cup \mathcal{C}_{IV}''' \cup \mathcal{C}_I''$ (linia przerywana) i pewnego $\rho > 0$ (rys. 4.8).



Rys. 4.8. Charakterystyka Nyquista transmitancji z biegunem w zerze oraz parą biegunów urojonych

Jak widzimy, punkt kontrolny $(-1, j0)$ jest okrążany dwukrotnie ($N = 2$). Ponieważ transmitancja $G_0(s)$ otwartego układu nie posiada biegunów w prawej półpłaszczyźnie zespolonej ($P = 0$), zatem liczba takich biegunów transmitancji układu zamkniętego równa się $Z = N + P = 2$.

Przykład 4.1.9 Układ regulacji składa się z obiektu o transmitancji

$$G_p(s) = \frac{1}{T_0 s(1 + Ts)}, \quad T > 0, \quad T_0 > 0$$

oraz szeregowo połączony regulator PI opisanego transmitancją

$$G_c(s) = k_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right)$$

objętych jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym. Podaj warunek stabilności układu zamkniętego. Wyznacz wartości nastaw k_c oraz T_i regulatora, zapewniające temu układowi zapas fazy $M_p = 50^\circ$.

Rozwiązanie Równanie charakterystyczne układu zamkniętego dane jest wzorem $k + kT_i s + s^2 + Ts^3 = 0$, gdzie $k = k_c/(T_i T_0)$. Wystarczający warunek stabilności zamkniętego układu regulacji ma zatem postać układu dwóch nierówności: $k_c > 0$ oraz $T_i > T$. Nierówność $T_i > T$ wymaga pewnego komentarza. Rozważany stabilny układ regulacji jest układem astatycznym drugiego rzędu – dobierając wartość stałej całkowania T_i regulatora PI , nie można zatem opierać się na zasadzie bezpośredniej kompensacji ujemnego bieguna transmitancji obiektu poprzez odpowiednie zero transmitancji tego regulatora. Oznaczając $T_i = \alpha T$, gdzie $\alpha > 1$, argument widmowej transmitancji $G_0(j\omega) = G_c(j\omega)G_p(j\omega)$ układu otwartego wyrażamy wzorem

$$\begin{aligned} \arg G_0(j\omega) &= -180^\circ + \arctan(\omega\alpha T) - \arctan(\omega T) & (4.17) \\ &= -180^\circ + \arctan\left(\frac{\omega T(\alpha - 1)}{1 + \alpha\omega^2 T^2}\right). \end{aligned}$$

Niech ω_{\max} będzie taką pulsacją ω , dla której $\arg G_0(j\omega)$ przyjmuje maksymalną wartość. Różniczkując względem ω wyrażenie (4.17) oraz przyrównując odpowiednią pochodną do zera, stwierdzamy, że $\omega_{\max} = \omega_{\max}(\alpha) = 1/(T\sqrt{\alpha})$. Jak łatwo sprawdzić, zachodzi

$$\arg G_0(j\omega)|_{\omega=\omega_{\max}(\alpha)} = -180^\circ + \arctan\left(\frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}\right). \quad (4.18)$$

Ustalając wartość parametru α , wyznacza się tym samym wartość stałej całkowania T_i regulatora PI . Wzmocnienie $k_c = k_c(\alpha)$ tego regulatora dobrać można w taki sposób, aby pulsacja $\omega_{\max}(\alpha)$ równała się pulsacji odcięcia amplitudowej charakterystyki układu otwartego ω_{gc} , określonej wzorem $|G_0(j\omega_{gc})| = 1$. Z definicji pulsacji $\omega_{\max}(\alpha)$ wynika, że dla danego α uzyskuje się w ten sposób maksymalny zapas fazy M_p rozważanego układu regulacji (por. wzór (4.18))

$$M_p = M_p(\alpha) = \arctan\left(\frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}}\right). \quad (4.19)$$

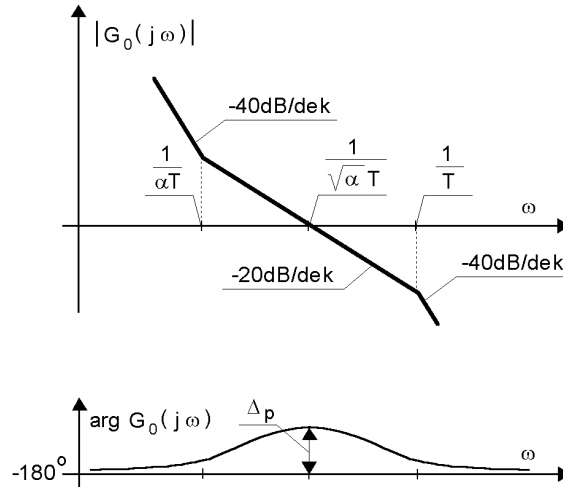
Wzmocnienie regulatora PI oblicza się zatem ze wzoru

$$k_c(\alpha) = T_0 \omega_{\max}(\alpha) = \frac{T_0}{T\sqrt{\alpha}}. \quad (4.20)$$

Kiedy zapas fazy M_p jest narzucony, odpowiadającą mu wartość parametru $\alpha(M_p)$ otrzymuje się po odwróceniu zależności (4.19). Prowadzi to do stosownego kwadratowego równania, którego rozwiązanie określa wzór

$$\alpha(M_p) = 1 + 2 \tan^2 M_p + \sqrt{(1 + 2 \tan^2 M_p)^2 - 1}.$$

Asymptotyczne charakterystyki Bodego tak zaprojektowanego otwartego układu regulacji przedstawiono na rys. 4.9.



Rys. 4.9. Charakterystyki Bodego otwartego układu regulacji

Zakładając, że wartości nastaw regulatora PI przyjęto zgodnie z formułami $k_c(\alpha)$ oraz $T_i = \alpha T$, gdzie $\alpha > 1$ jest swobodnym projektowym parametrem, transmitancję $G(p)$, $p = sT$, zamkniętego układu regulacji zapisać można wzorem

$$G(p) = \frac{1 + \alpha p}{1 + \alpha p + \alpha\sqrt{\alpha}p^2 + \alpha\sqrt{\alpha}p^3}.$$

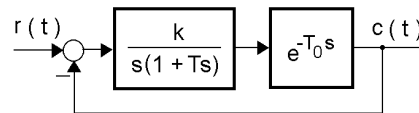
Własności układu modelowanego taką wzorcową (prototypową) transmitancją trzeciego rzędu (dla wybranych wartości zapasu fazy M_p) ilustrują dane zawarte w tabeli 4.1 (dane te uzyskano na drodze komputerowej symulacji).

Tabela 4.1. Własności wzorcowego układu trzeciego rzędu

| zapas fazy M_p | 30° | 40° | 50° | 60° | 70° |
|---|--------|--------|--------|---------|---------|
| parametr α | 3.0000 | 4.5989 | 7.5486 | 13.9282 | 32.1634 |
| przeregulowanie $\kappa\%$ [%] | 52.48 | 39.50 | 28.07 | 18.79 | 12.03 |
| czas maksimum T_κ/T | 5.041 | 6.188 | 8.091 | 12.058 | 22.195 |
| czas ustalania $T_{s2\%}/T$ | 19.010 | 17.467 | 19.621 | 36.100 | 73.860 |
| czas ustalania $T_{s5\%}/T$ | 13.525 | 11.311 | 16.960 | 28.007 | 50.649 |
| pulsacja odcięcia $\omega_{gc}T$ [rad] | 0.577 | 0.466 | 0.364 | 0.268 | 0.176 |
| wskaznik oscylacyjności M_r | 2.008 | 1.577 | 1.347 | 1.217 | 1.132 |
| pulsacja rezonansowa $\omega_r T$ [rad] | 0.519 | 0.368 | 0.229 | 0.125 | 0.056 |

Powracając do warunków rozważanego przykładu ($M_p = 50^\circ$), ze wzoru (4.20) otrzymuje się $\alpha = 7.5486$. Wymagane wartości nastaw regulatora PI to zatem: $k_c = 0.364T_0/T$ oraz $T_i = 7.549T$.

Przykład 4.1.10 Dany jest układ regulacji o strukturalnym schemacie jak na rys. 4.10, przy czym $k = 5$ oraz $T = 0.2$ s.



Rys. 4.10. Strukturalny schemat układu regulacji

Traktując opóźnienie T_0 jako zmienną, znajdź zależność, która wiąże krytyczną ze względu na stabilność wartość $T_{0\max}$ tej zmiennej z wartościami k i T pozostałych parametrów rozważanego układu.

Rozwiązanie Oznaczmy przez $G_0(j\omega)$ widmową transmitancję układu otwartego przy $T_0 = 0$. Zachodzi zatem

$$G_0(j\omega) = \frac{k}{\omega\sqrt{1+\omega^2T^2}} \cdot e^{-j(\pi/2+\arctan(\omega T))}. \quad (4.21)$$

Niech ω_{gc} będzie pulsacją odcięcia amplitudowej charakterystyki tego układu – co oznacza, że obowiązuje równość $|G_0(j\omega_{gc})| = 1$. Na podstawie wzoru (4.21) wnioskujemy, że

$$\omega_{gc} = \frac{\sqrt{\frac{\sqrt{1+4k^2T^2}-1}{2}}}{T}.$$

Argument $\arg G_0(j\omega_{gc})$ wyznaczamy ze wzoru

$$\arg G_0(j\omega_{gc}) = -90^\circ - \arctan \sqrt{\frac{\sqrt{1+4k^2T^2}-1}{2}}. \quad (4.22)$$

Krytyczną wartość opóźnienia T_0 obliczamy zatem zgodnie z formułą

$$T_{0\max} = \frac{\arg G_0(j\omega_{gc}) + \pi}{\omega_{gc}}$$

skąd – po uwzględnieniu (4.22) – uzyskujemy poszukiwaną zależność

$$T_{0\max} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\frac{\sqrt{1+4k^2T^2}-1}{2}}}{\sqrt{\frac{\sqrt{1+4k^2T^2}-1}{2}}}. \quad (4.23)$$

Podstawiając we wzorze (4.23) wartości $k = 5$ oraz $T = 0.2$ s, otrzymujemy $T_{0\max} = 0.230$ s, co oznacza, że warunkiem stabilności układu jest spełnienie nierówności $T_0 < 0.230$ s.

Przykład 4.1.11 Na rys. 4.11 przedstawiono strukturalny schemat pewnego układu sterowania kątowym położeniem wału silnika prądu stałego. Poszczególne elementy tego układu opisane są w następujący sposób:

– silnik prądu stałego modelowany transmitancją

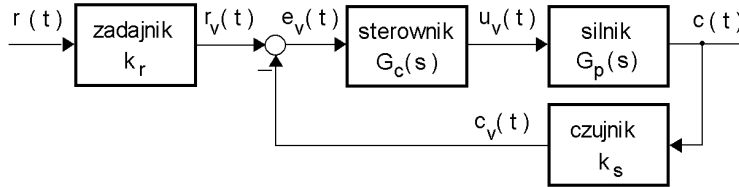
$$G_p(s) = \frac{k_p}{s(1+T_p s)}, \quad k_p = 600 [\text{stopień} \cdot \text{V}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}], \quad T_p = 0.120 \text{ s},$$

– czujnik położenia wału: $k_s = 0.06 [\text{V} \cdot \text{stopień}^{-1}]$,

- układ zadający: $k_r = k_s = 0.06 \text{ [V} \cdot \text{stopień}^{-1}]$,
- sterownik: regulator *PID* o transmitancji złożonej z szeregowego połączenia członu *PI* oraz 'rzeczywistego' członu *PD*

$$G_c(s) = k_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right) \cdot \frac{1 + T_d s}{1 + T_D s}, \quad T_D \ll T_d.$$

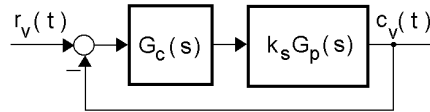
Sygnaly występujące na rys. 4.11 oznaczają: $r(t)$ – zadany kąt obrotu, $r_v(t)$ – napięciowy sygnał zadający, $e_v(t)$ – napięciowy sygnał różnicowy, $u_v(t)$ – napięciowy sygnał sterujący, $c(t)$ – sterowany kąt obrotu, $c_v(t)$ – napięciowy sygnał pomiarowy.



Rys. 4.11. Strukturalny schemat układu sterowania silnikiem prądu stałego

Opierając się na wynikach *przykładu 4.1.9*, należy dobrać wartości nastaw k_c , T_i , T_d oraz T_D , zapewniające rozważanemu układowi sterowania zapas fazy $M_p = 40^\circ$ oraz czas ustalania odpowiedzi skokowej $T_{s5\%} \leq 0.05 \text{ s}$.

Rozwiązanie Przyjmując sygnał zadający $r_v(t)$ jako wielkość wejściową, zaś sygnał pomiarowy $c_v(t)$ – jako wielkość wyjściową, otrzymuje się schemat układu zamkniętego dany na rys. 4.12.



Rys. 4.12. Przekształcony schemat układu sterowania silnikiem prądu stałego

Operatorową transmitancję odpowiedniego układu otwartego określa wzór

$$G_0(s) = \frac{k_c k_p k_s (1 + T_i s)(1 + T_d s)}{T_i s^2 (1 + T_p s)(1 + T_D s)}. \quad (4.24)$$

W przykładzie 4.1.9 rozpatrzono sparametryzowaną rodzinę wzorcowych operatorowych transmitancji układu zamkniętego trzeciego rzędu

$$\bar{G}(s) = \frac{1 + T\alpha s}{1 + T\alpha s + T^2\alpha\sqrt{\alpha}s^2 + T^3\alpha\sqrt{\alpha}s^3} \quad (4.25)$$

w której wartość parametru α wynika z zadanego zapasu fazy M_p

$$\alpha(M_p) = 1 + 2 \tan^2 M_p + \sqrt{(1 + 2 \tan^2 M_p)^2 - 1}$$

zaś parametr T wyznacza skalę czasu procesów przejściowych w tym układzie. Dla zadanego zapasu fazy $M_p = 40^\circ$ otrzymujemy zatem (por. tabela 4.1) $\alpha = 4.5989$ oraz $T_{s5\%} = 11.311T$, co prowadzi do $T = T_{s5\%}/11.311 = 0.00442$ s. Transmitancji (4.25) odpowiada następująca wzorcowa transmitancja otwartego układu sterowania z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym

$$\bar{G}_0(s) = \frac{1 + T\alpha s}{\alpha\sqrt{\alpha}(Ts)^2(1 + Ts)}. \quad (4.26)$$

Porównując wzory (4.24) oraz (4.26), dochodzimy do wniosku, że żadaną postać (4.26) transmitancji układu otwartego uzyskamy, przyjmując następujące wartości nastaw regulatora *PID*:

$$k_c = \frac{1}{k_p k_s T \sqrt{\alpha}}, \quad T_i = \alpha T, \quad T_d = T_p \quad \text{oraz} \quad T_D = T.$$

Dla postawionych wymagań otrzymujemy zatem: $k_c = 2.9302$, $T_i = 0.02033$ s, $T_d = 0.120$ s oraz $T_D = 0.00442$ s. Jak łatwo zauważyć, powyższe rozwiązanie nie jest rozwiązaniem jedynym – żadaną transmitancję (4.26) zapewniają także nastawy regulatora *PID* dobrane przy wykorzystaniu następujących reguł:

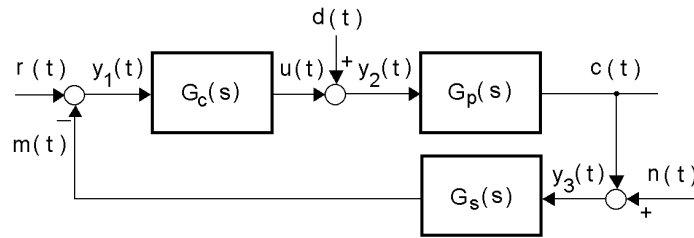
$$k_c = \frac{T_p}{k_p k_s T^2 \alpha \sqrt{\alpha}}, \quad T_i = T_p, \quad T_d = \alpha T \quad \text{oraz} \quad T_D = T.$$

Prowadzi to do alternatywnego zbioru nastaw regulatora: $k_c = 17.297$, $T_i = 0.120$ s, $T_d = 0.02033$ s oraz $T_D = 0.00442$ s. Drugie rozwiązanie, dla którego spełnione jest nierównościowe ograniczenie $T_i > T_d$, obowiązuje niekiedy w praktycznych implementacjach regulatorów *PID*, wymaga jednak zastosowania regulatora o większym wzmocnieniu.

Przykład 4.1.12 Dany jest układ regulacji o strukturalnym schemacie jak na rys. 4.13. Operatorowe transmitancje $G_p(s)$, $G_c(s)$ oraz $G_s(s)$ modelują tu zachowanie odpowiednio: obiektu regulacji, regulatora oraz czujnika pomiarowego. Zachodzi przy tym:

$$G_p(s) = \frac{1}{(2-s)(3+s)}, \quad G_c(s) = \frac{2-s}{1+s} \quad \text{oraz} \quad G_s(s) = \frac{1}{1+s}. \quad (4.27)$$

Sygnały dochodzące do sumacyjnych węzłów tego schematu oznaczają: $c(t)$ – sygnał wielkości regulowanej, $r(t)$ – sygnał wielkości zadającej, $u(t)$ – sygnał sterujący, $m(t)$ – sygnał pomiarowy, $d(t)$ – zakłócenie oddziałujące na wejście regulowanego obiektu oraz $n(t)$ – szum pomiarowy.



Rys. 4.13. Strukturalny schemat układu regulacji

Zbadaj, czy rozważany zamknięty układ regulacji jest dobrze określony oraz wewnętrznie (totalnie) stabilny.

Rozwiązanie Oznaczmy przez $Y_1(s)$, $Y_2(s)$ oraz $Y_3(s)$ transformaty sygnałów wychodzących z odpowiednich sumacyjnych węzłów rozważanego schematu. Zgodnie z rys. 4.13 mamy zatem:

$$\begin{aligned} Y_1(s) &= R(s) - M(s) = R(s) - G_s(s)Y_3(s) \\ Y_2(s) &= D(s) + U(s) = D(s) + G_c(s)Y_1(s) \\ Y_3(s) &= N(s) + C(s) = N(s) + G_p(s)Y_2(s). \end{aligned}$$

Zapisując powyższe wzory w macierzowej postaci, otrzymujemy

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & G_s(s) \\ -G_c(s) & 1 & 0 \\ 0 & -G_p(s) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}. \quad (4.28)$$

Aby układ zamknięty był dobrze określony, muszą istnieć wszystkie transmitancje zdefiniowane dla trójki zewnętrznych sygnałów $(R(s), D(s), N(s))$ oraz trójki wyróżnionych wewnętrznych sygnałów $(Y_1(s), Y_2(s), Y_3(s))$ tego układu. Warunek dobrej określoności rozpatrywanego układu sformułować można zatem w postaci wymagania, aby wyznacznik $1 + G_p(s)G_c(s)G_s(s)$ macierzy występującej we wzorze (4.28) nie równał się tożsamościowo zeru. Jeżeli warunek ten jest spełniony, odpowiednie operatorowe macierze istnieją i można je wyznaczyć na podstawie wzoru

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & G_s(s) \\ -G_c(s) & 1 & 0 \\ 0 & -G_p(s) & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} R(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} G_{ry_1}(s) & G_{dy_1}(s) & G_{ny_1}(s) \\ G_{ry_2}(s) & G_{dy_2}(s) & G_{ny_2}(s) \\ G_{ry_3}(s) & G_{dy_3}(s) & G_{ny_3}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{1 + G_p(s)G_c(s)G_s(s)} \begin{bmatrix} 1 & -G_p(s)G_s(s) & -G_s(s) \\ G_c(s) & 1 & -G_c(s)G_s(s) \\ G_p(s)G_c(s) & G_p(s) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(s) \\ D(s) \\ N(s) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Gdy transmitancje $G_p(s)$, $G_c(s)$ oraz $G_s(s)$ są właściwymi funkcjami wymiernymi zmiennej zespolonej s , warunek dobrej określoności układu zamkniętego rozszerza się o wymaganie, aby wszystkie elementy macierzy odwrotnej, występującej we wzorze (4.29), były także właściwymi funkcjami wymiernymi zmiennej s . Jak łatwo pokazać, konieczny i wystarczający warunek tak zdefiniowanej dobrej określoności rozważanego układu przyjmuje postać zadania, aby wyznacznik $1 + G_p(s)G_c(s)G_s(s)$ nie był ściśle właściwą wymierną funkcją zmiennej zespolonej s , co zapisujemy jako

$$G_p(s)G_c(s)G_s(s)|_{s \rightarrow \infty} \neq -1.$$

Badany zamknięty układ regulacji jest wewnętrznie stabilny, gdy żadna z dziewięciu transmitancji, stanowiących elementy odwrotnej macierzy ze wzoru (4.29), nie posiada biegunów w prawej domkniętej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej. Konieczny i wystarczający warunek wewnętrznej stabilności tego układu sformułować można w postaci następującego podwójnego wymagania:

- wyznacznik $1 + G_p(s)G_c(s)G_s(s)$ nie posiada zer w prawej domkniętej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej,

- w iloczynie $G_p(s)G_c(s)G_s(s)$ nie występują skreślenia w parach złożonych z zera i bieguna z prawej domkniętej półpłaszczyzny zespolonej.

W przypadku operatorowych transmitancji (4.27) mamy

$$\begin{aligned} 1 + G_p(s)G_c(s)G_s(s) &= \frac{4 + 7s + 5s^2 + s^3}{(1 + s)^2(3 + s)} \\ &= \frac{(3.20557 + s)(0.665457^2 + (0.897215 + s)^2)}{(1 + s)^2(3 + s)}. \end{aligned}$$

Na tej podstawie stwierdzamy, że rozważany układ regulacji, będąc układem dobrze określonym, nie spełnia jednak warunku wewnętrznej stabilności: w iloczynie $G_c(s)G_p(s)$ występuje bowiem niedozwolone skreślenie w parze złożonej z bieguna $p = 2$ transmitancji obiektu regulacji oraz zera $z = 2$ transmitancji regulatora. Transmitancje odpowiednich torów sygnałowych mają postać:

$$\begin{aligned} G_{ry_1}(s) &= \frac{(1 + s)^2(3 + s)}{4 + 7s + 5s^2 + s^3}, & G_{dy_1}(s) &= \frac{1 + s}{(2 - s)(4 + 7s + 5s^2 + s^3)} \\ G_{ny_1}(s) &= \frac{-(1 + s)(3 + s)}{4 + 7s + 5s^2 + s^3}, & G_{ry_2}(s) &= \frac{(2 - s)(1 + s)(3 + s)}{4 + 7s + 5s^2 + s^3} \\ G_{dy_2}(s) &= \frac{(1 + s)^2(3 + s)}{4 + 7s + 5s^2 + s^3}, & G_{ny_2}(s) &= \frac{(-2 + s)(3 + s)}{4 + 7s + 5s^2 + s^3} \\ G_{ry_3}(s) &= \frac{1 + s}{4 + 7s + 5s^2 + s^3}, & G_{dy_3}(s) &= \frac{(1 + s)^2}{(2 - s)(4 + 7s + 5s^2 + s^3)} \end{aligned}$$

$$G_{ny_3}(s) = \frac{(1 + s)^2(3 + s)}{4 + 7s + 5s^2 + s^3}.$$

Powyższe wyniki potwierdzają tezę o braku wewnętrznej stabilności układu zamkniętego. Jak widzimy, $G_{dy_1}(s) \notin \mathcal{RH}_\infty$ oraz $G_{dy_3}(s) \notin \mathcal{RH}_\infty$ (transmitancje te posiadają bowiem dodatni biegun $p = 2$). Rozważany układ rozpatrywany ze względu na wpływ zadającego sygnału $R(s)$ oraz pomiarowego szumu $N(s)$ na regulowaną wielkość $C(s)$ jest układem stabilnym w sensie *BIBO*, co łatwo sprawdzić, wyznaczając odpowiednie transmitancje:

$$\begin{aligned} G_{rc}(s) &= \frac{C(s)}{R(s)} = G_{ry_2}(s)G_p(s) = \frac{1 + s}{4 + 7s + 5s^2 + s^3} \\ G_{nc}(s) &= \frac{C(s)}{N(s)} = G_{ny_2}(s)G_p(s) = \frac{-1}{4 + 7s + 5s^2 + s^3}. \end{aligned}$$

Zadanie 4.1.1 Dane jest równanie

$$100 + 225s + 186s^2 + 74s^3 + 14s^4 + s^5 = 0.$$

Korzystając z kryterium Routha-Hurwitza, określ liczbę pierwiastków tego równania o części rzeczywistej większej od -3 .

Wskazówka: należy dokonać postawienia $s = p - 3$, a następnie zastosować kryterium Routha-Hurwitza w stosunku do tak uzyskanego wielomianu zmiennej zespolonej p .

Odpowiedź Równanie to ma trzy pierwiastki o części rzeczywistej większej niż -3 .

Zadanie 4.1.2 Dane jest równanie charakterystyczne pewnego układu dynamicznego:

- a) $130 + 77s + 26s^2 + 6s^3 + s^5 = 0$,
- b) $-36 - 13s^2 + 9s^3 + 26s^4 + 10s^5 + 3s^6 + s^7 = 0$,
- c) $50 + 25s + 12s^2 + 6s^3 + 2s^4 + s^5 = 0$,
- d) $-12 - 4s - 9s^2 - 3s^3 + 3s^4 + s^5 = 0$,
- e) $s^2 + 3s^3 + 4s^4 + 4s^5 + 3s^6 + s^7 = 0$.

Konstruując odpowiednią tablicę Routha, określ liczbę pierwiastków tego równania, leżących w prawej domkniętej półpłaszczyźnie zespolonej.

Odpowiedź

- a) Rozważane równanie ma dwa pierwiastki leżące w prawej półpłaszczyźnie zespolonej.
- b) Równanie to ma jeden pierwiastek leżący w prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej oraz dwie pary urojonych pierwiastków zespolonych sprzężonych o zerowych częściach rzeczywistych.
- c) Ten układ dynamiczny jest układem niestabilnym: dwa pierwiastki równania charakterystycznego leżą w prawej półpłaszczyźnie.
- d) Rozważany układ dynamiczny jest układem niestabilnym: jego równanie charakterystyczne ma jeden pierwiastek leżący w prawej półpłaszczyźnie oraz parę urojonych pierwiastków sprzężonych zespolonych.

- e) Współczynniki równania przy dwóch najniższych potęgach zespolonej zmiennej s mają wartość zero. Oznacza to, że równanie to posiada podwójny pierwiastek w zerze. Kryterium Routha-Hurwitza należy zatem stosować do zredukowanego równania charakterystycznego o postaci $1 + 3s + 4s^2 + 4s^3 + 3s^4 + s^5 = 0$. Tak postępując, stwierdzono, że badane równanie posiada ponadto dwa pierwiastki urojone.

Zadanie 4.1.3 Stosując kryterium Hurwitza, zbadaj stabilność układu dynamicznego, którego wielomian charakterystyczny ma postać

$$W(s) = 2 + 4s + s^2 + s^3 + s^4.$$

Odpowiedź Po wyznaczeniu macierzy Hurwitza H_4 , właściwej dla tego przypadku (wzór (4.5)), stwierdzamy, że minory główne tej macierzy mają wartość, odpowiednio: $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = -3$, $\Delta_3 = -14$ oraz $\Delta_4 = -28$. Wielomian $W(s)$ posiada zatem dwa pierwiastki w prawej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s . Układ jest więc niestabilny.

Zadanie 4.1.4 Dany jest układ regulacji z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym, złożony z obiektu o transmitancji

$$G_p(s) = \frac{1}{(1 + T_1s)(1 + T_2s)}, \quad T_1 = 2 \text{ s}, \quad T_2 = 8 \text{ s}$$

oraz regulatora PI opisanego transmitancją

$$G_c(s) = k_c \left(1 + \frac{1}{T_i s} \right). \quad (4.30)$$

Posługując się kryterium Routha, wyznacz taki obszar na płaszczyźnie nastaw (k_c, T_i) regulatora, któremu odpowiada stabilny układ zamknięty.

Odpowiedź Warunki stabilności układu zamkniętego

$$k_c > 0 \quad \text{oraz} \quad T_i > \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} \cdot \frac{k_c}{1 + k_c} = \frac{8}{5} \cdot \frac{k_c}{1 + k_c}.$$

Zadanie 4.1.5 W układzie regulacji wielkości wyjściowej obiektu o transmitancji

$$G_p(s) = \frac{1}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s)}, \quad T_1 = 2 \text{ s}, \quad T_2 = 8 \text{ s}$$

zastosowano jednostkowe ujemne sprzężenie zwrotne oraz regulator PI o transmitancji $G_c(s)$ danej wzorem (4.30). Posługując się kryterium Routha, określ warunki, jakie muszą spełniać nastawy k_c oraz T_i tego regulatora, aby zamknięty układ regulacji był układem stabilnym.

Odpowiedź Warunki stabilności zamkniętego układu regulacji mają postać nierówności

$$0 < k_c < \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = \frac{5}{8} \quad \text{oraz} \quad T_i > \frac{(T_1 + T_2)^2}{T_1 + T_2 - k_c T_1 T_2} = \frac{50}{5 - 8k_c}.$$

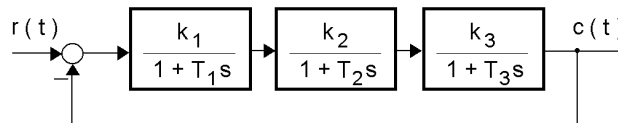
Zadanie 4.1.6 Tor główny pewnego prostego układu regulacji z ujemnym jednostkowym sprzężeniem zwrotnym opisany jest transmitancją

$$G_0(s) = \frac{k}{s(1 + Ts)^2}.$$

Stosując kryterium Hurwitza, wyznacz obszar stabilności tego układu na płaszczyźnie (k, T) jego parametrów.

Odpowiedź Minory główne odpowiedniej macierzy Hurwitza H_3 (zob. wzór (4.5)) przyjmują wartości: $\Delta_1 = 2/T$, $\Delta_2 = 2/T^3 - k/T^2$ oraz $\Delta_3 = 2k/T^5 - k^2/T^4$. Układ zamknięty będzie zatem stabilny, gdy $T > 0$, $k > 0$ oraz $kT < 2$.

Zadanie 4.1.7 Strukturalny schemat układu regulacji ma postać jak na rys. 4.14. Budując odpowiednią tablicę Routha, wyznacz krytyczną wartość \bar{k} wzmocnienia układu otwartego $k = k_1 k_2 k_3$, $k_1, k_2, k_3 > 0$, przy której zamknięty układ osiąga granicę stabilności. W przypadku jakich stałych czasowych T_1, T_2 i T_3 owa wartość osiąga minimum?



Rys. 4.14. Strukturalny schemat układu regulacji

Odpowiedź Krytyczne wzmocnienie układu otwartego wynosi

$$\bar{k} = \frac{T_1}{T_2} + \frac{T_2}{T_1} + \frac{T_1}{T_3} + \frac{T_3}{T_1} + \frac{T_2}{T_3} + \frac{T_3}{T_2} + 2.$$

Tak więc wzmocnienie to nie zależy od bezwzględnych wartości stałych czasowych T_1 , T_2 oraz T_3 , ale od stosunku tych stałych. Łatwo stwierdzić, że \bar{k} osiąga minimum $\bar{k}_{\min} = 8$ przy $T_1 = T_2 = T_3$.

Zadanie 4.1.8 Dana jest transmitancja toru głównego pewnego układu regulacji z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym

$$G_0 = \frac{k}{(1+s)^3}, \quad k > 0.$$

Korzystając z kryterium Hurwitza, podaj warunek, który musi spełniać parametr k tej transmitancji, aby rozważany układ zamknięty był stabilny.

Odpowiedź Minory główne macierzy Hurwitza H_3 , stosownej dla tego przypadku (zob. wzór (4.5)), przyjmują wartości: $\Delta_1 = 3$, $\Delta_2 = 8 - k$ oraz $\Delta_3 = (1+k)(8-k)$. Układ zamknięty będzie zatem stabilny przy $k < 8$. Porównaj ten wynik z wnioskami płynącymi z rozwiązania poprzedniego zadania 4.1.7 oraz następnego zadania 4.1.9.

Zadanie 4.1.9 Obiekt dynamiczny o transmitancji danej wzorem

$$G_p(s) = \frac{k_p}{(1+Ts)^n}, \quad k_p > 0, T > 0, n \geq 3 \quad (4.31)$$

jest sterowany w układzie z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym za pośrednictwem regulatora o wzmocnieniu $k_c > 0$. Podaj warunek stabilności układu zamkniętego.

Odpowiedź Badany układ jest stabilny w sensie *BIBO* przy

$$k_c < \frac{(1 + \tan^2(\frac{\pi}{n}))^{\frac{n}{2}}}{k_p} = \frac{1}{k_p \cos^n(\frac{\pi}{n})}.$$

Zadanie 4.1.10 Dynamiczny obiekt o operatorowej transmitancji

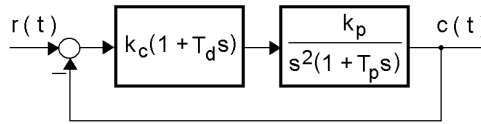
$$G_p(s) = \frac{k_p}{s(1 + T_1s)(1 + T_2s)}, \quad T_1, T_2 > 0$$

jest sterowany w zamkniętym układzie z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym za pomocą regulatora *PD* o transmitancji $G_c(s) = 1 + T_d s$. Posługując się algebraicznym kryterium stabilności, określ, jak należy dobrać wartość stałej czasowej T_d tego regulatora, by zamknięty układ był stabilny w sensie *BIBO* dla dowolnej dodatniej wartości parametru k_p .

Odpowiedź Układ zamknięty jest stabilny przy

$$T_d \geq \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} > \frac{T_1 T_2}{T_1 + T_2} - \frac{1}{k_p}.$$

Zadanie 4.1.11 Układ regulacji ma strukturę jak na rys. 4.15, przy czym wartości parametrów k_c , k_p , T_d oraz T_p są dodatnie.



Rys. 4.15. Strukturalny schemat układu regulacji

Powiększanie wartości parametru k_c regulatora prowadzi do wzrostu przyspieszeniowego wzmocnienia tego układu. Jaka jest graniczna z uwagi na stabilność wartość tego parametru, przy założeniu, że powyższy liniowy model obowiązuje bez ograniczeń?

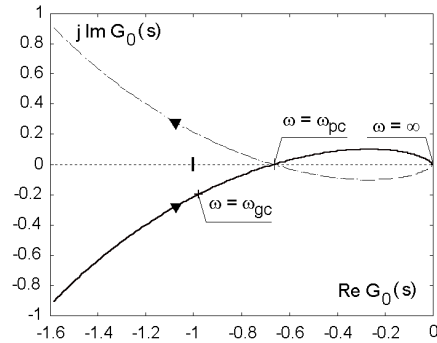
Odpowiedź Warunek stabilności ma postać $T_d > T_p$, Stabilność rozważanego układu nie zależy od wartości iloczynu $k_c k_p$.

Zadanie 4.1.12 Układ regulacji z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym składa się z dwuinercyjnego obiektu o transmitancji

$$G_p(s) = \frac{1}{(1 + s)(1 + 2s)}$$

oraz regulatora I o transmitancji $G_c(s) = 1/s$. Wykorzystując charakterystykę Nyquista układu otwartego, sprawdź, czy układ zamknięty jest układem stabilnym w sensie *BIBO*. W przypadku pozytywnej odpowiedzi, określ wartości zapasów wzmocnienia oraz fazy tego układu.

Odpowiedź Charakterystyka Nyquista układu otwartego o transmitancji $G_0(s) = G_p(s)G_c(s)$ dana jest na rys. 4.16. Zamknięty układ jest stabilny z zapasem wzmocnienia $M_g = 3.52$ dB oraz zapasem fazy $M_p = 11.52^\circ$. Pulsacje odcięcia amplitudowej oraz fazowej charakterystyki transmitancji $G_0(s)$ wynoszą odpowiednio: $\omega_{gc} = 0.5716$ rad·s⁻¹ oraz $\omega_{pc} = 1/\sqrt{2}$ rad·s⁻¹.



Rys. 4.16. Charakterystyka Nyquista otwartego układu regulacji

Zadanie 4.1.13 Transmitancja

$$G_0(s) = k \cdot \frac{(a + s)(b + s)}{s^2(c + s)}$$

opisuje otwarty układ regulacji z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym. Parametry a , b oraz c tej transmitancji przyjmują wartości: $a = \pm 1$, $b = \pm 3$ oraz $c = \pm 2$. Dla wszystkich możliwych trójek (a, b, c) rozważanych parametrów wyznacz przedział wartości k , dopuszczalnych ze względu na stabilność zamkniętego układu regulacji.

Odpowiedź Przyjmijmy standardowe oznaczenia: P – liczba biegunów transmitancji $G_0(s)$ leżących w otwartej prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej, N – liczba określająca, ile razy charakterystyka Nyquista okrąży zgodnie z ruchem wskazówek zegara punkt $(-1, j0)$ dla pulsacji ω zmieniającej się od $-\infty$ do $+\infty$, zaś Z oznacza liczbę biegunów transmitancji zamkniętego układu, leżących w otwartej prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zespolonej. Analizując odpowiednie charakterystyki Nyquista uzyskano następujące wnioski, dotyczące stabilności układu zamkniętego:

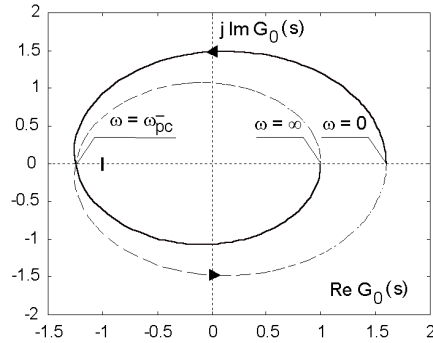
- (1, 3, 2) : $P = 0$, dla $k < 0$ mamy $N = 1$, zatem $Z = 1$,
dla $k > 0$ mamy $N = 0$, zatem $Z = 0$;
- (-1, 3, 2) : $P = 0$, dla $k < 0$ mamy $N = 2$, zatem $Z = 2$,
dla $k > 0$ mamy $N = 1$, zatem $Z = 1$;
- (1, -3, 2) : $P = 0$, dla $k < -0.5$ mamy $N = 2$, zatem $Z = 2$,
dla $-0.5 < k < 0$ mamy $N = 0$, zatem $Z = 0$
($\omega_{pc} = 1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$),
dla $k > 0$ mamy $N = 1$, zatem $Z = 1$;
- (-1, -3, 2) : $P = 0$, dla $k < -2.75$ mamy $N = 3$, zatem $Z = 3$,
dla $-2.75 < k < 0$ mamy $N = 1$, zatem $Z = 1$,
dla $k > 0$ mamy $N = 2$, zatem $Z = 2$;
- (1, 3, -2) : $P = 1$, dla $k < 0$ mamy $N = 0$, zatem $Z = 1$,
dla $0 < k < 2.75$ mamy $N = 1$, zatem $Z = 2$,
dla $k > 2.75$ mamy $N = -1$, zatem $Z = 0$
($\omega_{pc} = \sqrt{11} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$);
- (1, -3, -2) : $P = 1$, dla $k < 0$ mamy $N = 1$, zatem $Z = 2$,
dla $k > 0$ mamy $N = 0$, zatem $Z = 1$;
- (-1, 3, -2) : $P = 1$, dla $k < 0$ mamy $N = 1$, zatem $Z = 2$,
dla $0 < k < 0.5$ mamy $N = 2$, zatem $Z = 3$,
dla $k > 0.5$ mamy $N = 0$, zatem $Z = 1$;
- (-1, -3, -2) : $P = 1$, dla $k < 0$ mamy $N = 2$, zatem $Z = 3$,
dla $k > 0$ mamy $N = 1$, zatem $Z = 2$.

Zadanie 4.1.14 Wykreśl charakterystykę Nyquista układu otwartego opisanego transmitancją

$$G_0(s) = k \cdot \frac{24 + 10s + s^2}{15 - 8s + s^2}, \quad k = 1.$$

Sprawdź, czy układ zamknięty z ujemnym jednostkowym sprzężeniem zwrotnym jest układem stabilnym.

Odpowiedź Charakterystykę Nyquista otwartego układu przedstawiono na rys. 4.17. Zamknięty układ jest stabilny ($P = 2$, $N = -2$). Krytyczna wartość wzmocnienia k , przy której zamknięty układ znajduje się na granicy stabilności, wynosi $\bar{k} = 0.8 < 1$. Zapas wzmocnienia tego układu wynosi zatem $M_g^- = 1.938 \text{ dB}$. Pulsacja odcięcia fazowej charakterystyki transmitancji $G_0(s)$ ma wartość $\omega_{pc}^- = 4.3589 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



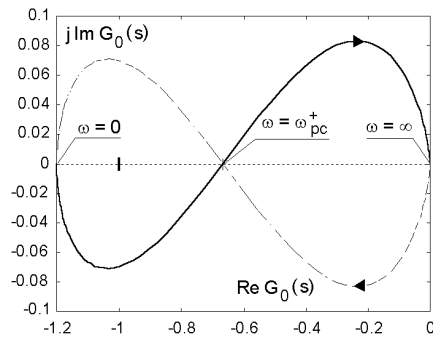
Rys. 4.17. Charakterystyka Nyquista

Zadanie 4.1.15 Transmitancja otwartego układu z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym dana jest wzorem

$$G_0(s) = \frac{60}{(-2 + s)(5 + s)^2}.$$

Wykreśl charakterystykę Nyquista tej transmitancji. Wyznacz zapas stabilności odpowiedniego układu zamkniętego.

Odpowiedź Charakterystykę Nyquista transmitancji $G_0(s)$ przedstawiono na rys. 4.18. Zamknięty układ jest stabilny, zachowując następujące zapasy stabilności: $M_g^+ = 3.5212$ dB, $M_g^- = 1.5836$ dB oraz $M_p = 4^\circ$. Pulsacje odcięcia częstotliwościowych charakterystyk tego układu wynoszą: $\omega_{pc}^+ = 2.236$ rad \cdot s $^{-1}$, $\omega_{pc}^- = 0$ rad \cdot s $^{-1}$ oraz $\omega_{gc} = 1.11$ rad \cdot s $^{-1}$.



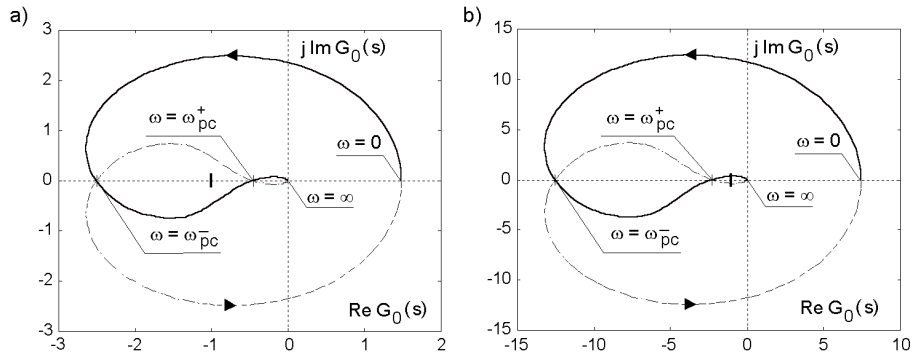
Rys. 4.18. Charakterystyka Nyquista

Zadanie 4.1.16 Operatorowa transmitancja niestabilnego dynamicznego obiektu dana jest wzorem

$$G_p(s) = \frac{(2+s)(1+s)^2}{(3+s)^2(4+s)(6+s)(1-s+s^2)}.$$

Wykreśl charakterystykę Nyquista tej transmitancji, a następnie oszacuj stabilność zamkniętego układu regulacji, w którym zastosowano proporcjonalny regulator o wzmacnieniu odpowiednio $k = 160$ oraz $k = 800$ przy jednostkowym ujemnym sprzężeniu zwrotnym.

Odpowiedź Charakterystyki Nyquista transmitancji $G_0(s) = k \cdot G_p(s)$ przedstawiono na rys. 4.19a,b. Na tej podstawie łatwo jest stwierdzić, że regulator o wzmacnieniu $k = 160$ prowadzi do stabilnego zamkniętego układu regulacji. Zapas stabilności tego układu wynosi: $M_g^+ = 6.737$ dB, $M_g^- = 7.972$ dB oraz $M_p = 22.9^\circ$, zaś odpowiednie pulsacje odcięcia mają wartość: $\omega_{pc}^+ = 5.449$ rad \cdot s $^{-1}$, $\omega_{pc}^- = 1.316$ rad \cdot s $^{-1}$ oraz $\omega_{gc} = 3.292$ rad \cdot s $^{-1}$.



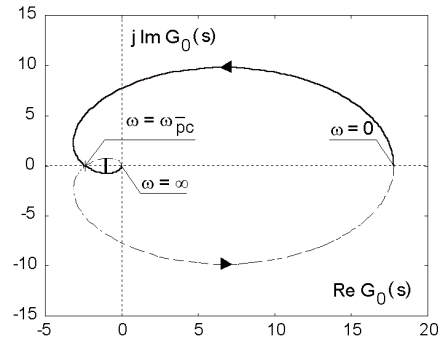
Rys. 4.19. Charakterystyki Nyquista niestabilnego otwartego układu regulacji z proporcjonalnym regulatorem o wzmacnieniu k : a) $k = 160$ (stabilny układ zamknięty), b) $k = 800$ (niestabilny układ zamknięty)

Zadanie 4.1.17 Transmitancja otwartego układu regulacji z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym dana jest wzorem

$$G_0(s) = k \cdot \frac{(2+s)^2(4+s)}{(-3+s)(-1+s)(1+s)(3+s)}, \quad k = 10.$$

Wykreśl charakterystykę Nyquista tej transmitancji oraz wyznacz zapas stabilności układu zamkniętego.

Odpowiedź Zapasy stabilności wynoszą: $M_g^- = 7.475$ dB oraz $M_p = 46.28^\circ$. Odpowiednie pulsacje odcięcia transmitancji $G_0(s)$ mają wartość: $\omega_{pc}^- = 4.472$ rad \cdot s $^{-1}$ oraz $\omega_{gc} = 10.1695$ rad \cdot s $^{-1}$ (rys. 4.20)



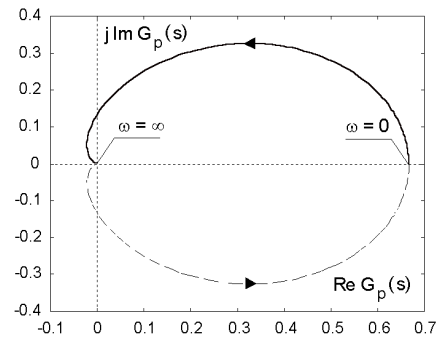
Rys. 4.20. Charakterystyka Nyquista otwartego układu regulacji

Zadanie 4.1.18 Czy obiekt o transmitancji

$$G_p(s) = \frac{4 + s}{(-3 + s)(-1 + s)(2 + s)}$$

może być efektywnie sterowany za pomocą proporcjonalnego regulatora w układzie z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym?

Odpowiedź Charakterystykę Nyquista transmitancji $G_p(s)$ pokazano na rys. 4.21. Jak widzimy, regulator typu P nie może być tu stosowany.



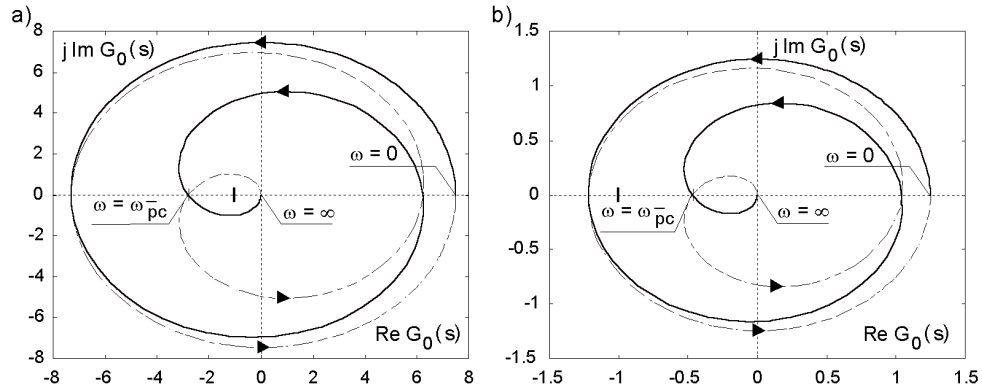
Rys. 4.21. Charakterystyka Nyquista

Zadanie 4.1.19 Regulator typu P steruje obiektem o transmitancji

$$G_p(s) = \frac{(1+s)(2+s)(3+s)}{(-1+s)(-2+s)(-3+s)(-4+s)}$$

w zamkniętym układzie z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym. Uzasadnij, że odpowiednio nastawiony regulator wystarcza do ustabilizowania takiego układu.

Odpowiedź Regulator o wzmacnieniu $k > 10.6878$ stabilizuje układ. Charakterystyki Nyquista transmitancji $G_0(s) = k \cdot G_p(s)$ układu otwartego, odpowiadające przykładowym wartościom wzmacnienia k , przedstawiono na rys. 4.22a,b. Rysunki te dotyczą odpowiednio: stabilnego układu zamkniętego ($k = 30$, $M_g^- = 17.28$ dB, $M_p = 59.26^\circ$, $\omega_{pc}^- = 0.9094$ rad \cdot s $^{-1}$, $\omega_{gc} = 29.732$ rad \cdot s $^{-1}$) oraz układu niestabilnego ($k = 5$).



Rys. 4.22. Charakterystyki Nyquista niestabilnego otwartego układu regulacji z proporcjonalnym regulatorem o wzmacnieniu k : **a)** $k = 30$ (stabilny układ zamknięty), **b)** $k = 5$ (niestabilny układ zamknięty)

Zadanie 4.1.20 Obiekt o operatorowej transmitancji

$$G_p(s) = \frac{k_p}{(1+T_1s)(1+T_2s)}, \quad k_p = 15, T_1 = 1 \text{ s}, T_2 = 2 \text{ s}$$

oraz całkujący regulator $G_c(s) = 1/(T_i s)$, gdzie $T_i = 8$ s, połączone są w układzie z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym. Sprawdź, stosując kryterium Nyquista, czy ten układ jest układem stabilnym. Jaka powinna być wartość stałej całkowania T_i , aby układ charakteryzował się zapasem wzmacnienia $M_g = 10$ dB? Jaki będzie zapas fazy M_p takiego układu?

Odpowiedź Zamknięty układ jest niestabilny, zachodzi bowiem $\operatorname{Re} G_0(j\omega_{pc}) = -1.25 < -1$ oraz $\operatorname{Im} G_0(j\omega_{pc}) = 0$, gdzie $G_0(s) = G_c(s)G_p(s)$ oznacza transmitancję układu otwartego, zaś $\omega_{pc} = 1/\sqrt{T_1 T_2} = 1/\sqrt{2} \operatorname{rad} \cdot \operatorname{s}^{-1}$ jest pulsacją odcięcia fazowej charakterystyki tej transmitancji. Żądany zapas wzmocnienia uzyskamy, kładąc

$$T_i = 10^{M_g/20} \cdot \frac{k_p(T_1 + T_2)}{(1 + \omega_{pc}^2 T_1^2)(1 + \omega_{pc}^2 T_2^2)} = 31.623 \operatorname{s}.$$

Zapasy fazy $M_p = 34.26^\circ$ wyznaczono ze wzoru $M_p = 90^\circ - \arctan(\omega_{gc} T_1) - \arctan(\omega_{gc} T_2)$, w którym przyjęto $\omega_{gc} = 0.3615 \operatorname{rad} \cdot \operatorname{s}^{-1}$.

Zadanie 4.1.21 Niech

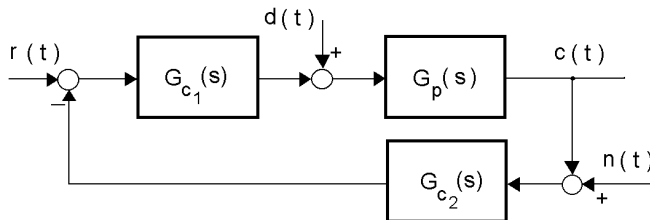
$$G_0(s) = k \cdot \frac{e^{-T_0 s}}{(1 + Ts)^n}, \quad k = 6, T = 0.15 \operatorname{s}, n = 3$$

oznacza transmitancję otwartego układu regulacji. Wyznacz krytyczną wartość czasu opóźnienia T_0 , dla której zamknięty układ z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym znajduje się na granicy stabilności.

Odpowiedź Krytyczne opóźnienie wynosi

$$T_{0\max} = \frac{\pi - n \cdot \arctan \sqrt{k^2/n - 1}}{\sqrt{k^2/n - 1}} \cdot T = 0.01754 \operatorname{s}.$$

Zadanie 4.1.22 Czy układ o strukturalnym schemacie danym na rys. 4.23 jest dobrze określony oraz wewnętrznie stabilny?



Rys. 4.23. Strukturalny schemat układu regulacji

Rozważ następujące przypadki transmitancji obiektu $G_p(s)$, regulatora $G_{c1}(s)$ w głównym torze regulacji oraz korektora $G_{c2}(s)$ w torze sprzężenia zwrotnego:

$$\text{a)} \quad G_p(s) = \frac{1}{-3+s}, \quad G_{c1}(s) = \frac{-3+s}{2+s}, \quad G_{c2}(s) = 1$$

$$\text{b)} \quad G_p(s) = \frac{s}{2+s}, \quad G_{c1}(s) = \frac{-(2+s)}{1+s}, \quad G_{c2}(s) = \frac{4+s}{3+s}$$

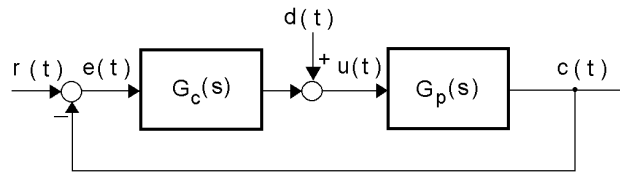
$$\text{c)} \quad G_p(s) = \frac{1}{s(-2+s)(3+s)}, \quad G_{c1}(s) = \frac{-2+s}{1+s}, \quad G_{c2}(s) = \frac{1+0.5s}{1+2s}$$

$$\text{d)} \quad G_p(s) = \frac{5+s}{1+s}, \quad G_{c1}(s) = \frac{2+s}{3+s}, \quad G_{c2}(s) = \frac{2-s}{2+s}$$

$$\text{e)} \quad G_p(s) = \frac{1}{-1+s^2}, \quad G_{c1}(s) = \frac{-1+s}{1+s}, \quad G_{c2}(s) = 1.$$

Odpowiedź W przypadkach **a)**, **c)** oraz **e)** układ jest dobrze określony oraz wewnętrznie niestabilny. W przypadkach **b)** oraz **d)** układ, będąc wewnętrznie stabilnym, nie jest układem dobrze określonym.

Zadanie 4.1.23 Sprawdź, czy układ regulacji o strukturalnym schemacie przedstawionym na rys. 4.24 jest układem wewnętrznie stabilnym.



Rys. 4.24. Strukturalny schemat układu regulacji

Transmitancje $G_c(s)$ oraz $G_p(s)$ mają postać

$$G_c(s) = \frac{4+s}{s} \quad \text{oraz} \quad G_p(s) = \frac{s}{2+s}.$$

Odpowiedź Rozważany układ nie jest wewnętrznie stabilny.

Zadanie 4.1.24 Obiekt o transmitancji danej wzorem (4.31) jest sterowany w układzie z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym za pomocą proporcjonalnego regulatora o wzmacnieniu k_c . Wzmocnienie obiektu $k_p = 1$.

- a) Przyjmując $k_c = 1$, wyznacz zapas wzmacnienia M_g układu zamkniętego. Co można powiedzieć o zapasie fazy M_p tego układu?
- b) Nastawę k_c regulatora dobrano w taki sposób, aby zapas wzmacnienia układu zamkniętego równał się $M_g = 6$ dB. Jak jest zapas fazy M_p układu zamkniętego?

Odpowiedź

- a) Zapas wzmacnienia ma wartość

$$M_g(n) = -20n \cdot \log_{10} \left(\cos \left(\frac{\pi}{n} \right) \right) \text{ [dB]}.$$

Zapas fazy wynosi $M_p = 180^\circ$. Zauważmy, że $\lim_{n \rightarrow \infty} M_g(n) = 0$.

- b) Mamy

$$k_c = \frac{1}{2 \cos^n \left(\frac{\pi}{n} \right)}$$

Zapas fazy ma wartość

$$M_p = \pi - n \cdot \arctan \sqrt{\frac{1}{2^{2/n} \cos^2(\pi/n)} - 1}, \quad 3 \leq n \leq 7.$$

Dla $n \geq 8$ zapas fazy jest nieskończony.

Zadanie 4.1.25 Załóżmy, że nominalny model pewnego zamkniętego układu regulacji z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym przyjmuje postać standardowej transmitancji rzędu drugiego (3.3). Wyprowadź wzór na zapas fazy M_p takiego układu.

Odpowiedź Mamy

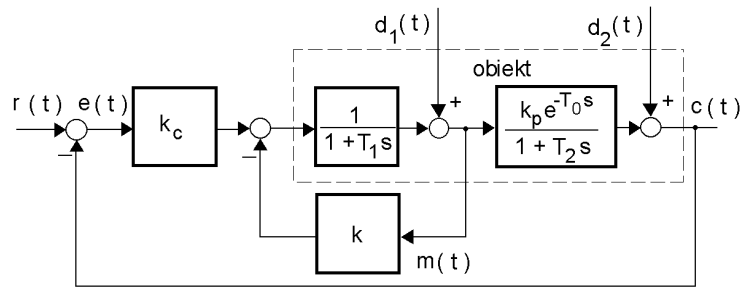
$$M_p = \arctan \left(\frac{2\zeta}{\tau\omega_{gc}} \right), \quad \text{gdzie} \quad \omega_{gc} = \frac{\sqrt{\sqrt{4\zeta^4 + 1} - 2\zeta^2}}{\tau}. \quad (4.32)$$

Ponadto dla $M_p \geq 0$ obowiązuje użyteczna zależność

$$\zeta = \frac{\sqrt{\cos M_p} \cdot \tan M_p}{2}. \quad (4.33)$$

4.2 Stabilność a dokładność regulacji. Układy statyczne i astatyczne

Przykład 4.2.1 Dany jest układ regulacji, w którym na obiekt oddziałują dwa zakłócenia, zaś sterowanie realizowane jest zgodnie z algorytmem regulacji kaskadowej, w którym pomocniczy sygnał pomiarowy $m(t)$ wykorzystuje się w celu korekcji własności dynamicznych wybranego fragmentu obiektu (rys. 4.25).



Rys. 4.25. Strukturalny schemat układu regulacji

Przyjmując, że krytyczną postać zakłóceń modelować można skokiem jednostkowym, należy tak dobrać wzmacnienie k_c głównego regulatora oraz wzmacnienie k regulatora pomocniczego, aby zapas wzmacnienia układu zamkniętego wynosił $M_g = 10$ dB, zaś ustalony błąd $|e(\infty)|$ dla każdego z zakłóceń osobno nie przekraczał $|e(\infty)| \leq 0.2$. Wartości parametrów obiektu są następujące: $k_p = 2$, $T_0 = 0.005$ s, $T_1 = 0.05$ s oraz $T_2 = 0.01$ s.

Rozwiązanie Niech $k = 0$. Uchybowe transmitancje zakłóceńowe dane są wówczas wzorami:

$$G_{d_1 e}(s)|_{k=0} = \frac{-k_p(1+T_1s)e^{-sT_0}}{1+k_c k_p e^{-sT_0} + (T_1+T_2)s + T_1 T_2 s^2}$$

$$G_{d_2 e}(s)|_{k=0} = -\frac{1+(T_1+T_2)s + T_1 T_2 s^2}{1+k_c k_p e^{-sT_0} + (T_1+T_2)s + s^2 T_1 T_2 s^2}$$

W przypadku stabilnego układu regulacji otrzymuje się następujące wartości ustalonych błędów dla skokowych zakłóceń:

$$|e_{d_1}(\infty)|_{k=0} = \frac{k_p}{1+k_c k_p} \quad \text{oraz} \quad |e_{d_2}(\infty)|_{k=0} = \frac{1}{1+k_c k_p}$$

Operatorowa transmitancja otwartego układu regulacji ma postać

$$G_0(s)|_{k=0} = \frac{k_c k_p e^{-sT_0}}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}.$$

Dla pulsacji odcięcia $\omega_{pc0} = 146.7 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ fazowej charakterystyki transmitancji $G_0(s)|_{k=0}$ mamy

$$\arg G_0(s)|_{s=j\omega_{pc0}, k=0} = -180^\circ \quad \text{oraz} \quad |G_0(s)|_{s=j\omega_{pc0}, k=0} = 0.15211 k_c.$$

Przy $k = 0$ oraz $k_c = 10^{-M_g/20}/0.15211 = 2.079$ zamknięty układ regulacji posiada zatem wymagany zapas wzmocnienia M_g . Nastawom tym odpowiadają ustalone wartości błędów: $|e_{d1}(\infty)|_{k_c=2.079, k=0} = 0.3878$ oraz $|e_{d2}(\infty)|_{k_c=2.079, k=0} = 0.1939$. Wynika stąd, że uproszczona struktura układu ($k = 0$) nie wystarcza do spełnienia postawionych wymagań – zmniejszenie wpływu zakłóceń uzyskać można tylko kosztem obniżenia zapasu stabilności układu zamkniętego. Rozważmy przeto sterowanie w układzie o kaskadowej strukturze ($k > 0$). Odpowiednie uchybowe transmitancje zakłóceniami opisane są w tym przypadku wzorami:

$$G_{d1e}^c(s) = \frac{-k_p \bar{k} (1 + T_1 s) e^{-sT_0}}{1 + k_c k_p \bar{k} e^{-sT_0} + (\bar{T}_1 + T_2) s + s^2 \bar{T}_1 T_2 s^2}$$

$$G_{d2e}^c(s) = \frac{-(1 + (\bar{T}_1 + T_2) s + \bar{T}_1 T_2 s^2)}{1 + k_c k_p \bar{k} e^{-sT_0} + (\bar{T}_1 + T_2) s + \bar{T}_1 T_2 s^2}$$

gdzie $\bar{k} = 1/(1 + k)$ oraz $\bar{T}_1 = T_1/(1 + k)$.

Ustalone wartości błędów wynoszą, odpowiednio:

$$|e_{d1}(\infty)| = \frac{k_p}{1 + k + k_c k_p} \quad \text{oraz} \quad |e_{d2}(\infty)| = \frac{1 + k}{1 + k + k_c k_p}.$$

Transmitancja otwartego układu regulacji jest zgodna ze wzorem

$$G_0(s) = \frac{k_c k_p \bar{k} e^{-sT_0}}{(1 + \bar{T}_1 s)(1 + T_2 s)}.$$

Niech ω_{pc} oznacza pulsację odcięcia fazowej charakterystyki transmitancji $G_0(s)$. Zachodzi zatem $\arg G_0(j\omega_{pc}) = -180^\circ$. Dla ustalonej wartości k wzmocnienie k_c , zapewniające zapas M_g , otrzymuje się ze wzoru

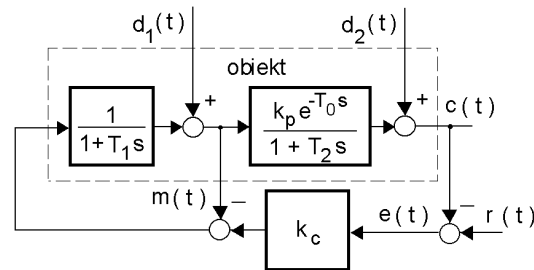
$$k_c = \frac{10^{-M_g/20}}{k_p \bar{k}} \cdot \sqrt{(1 + \omega_{pc}^2 \bar{T}_1^2)(1 + \omega_{pc}^2 T_2^2)}.$$

W tabeli 4.2 przedstawiono wyniki obliczeń dla wybranych wartości k , przy czym ω_{gc} jest pulsacją odcięcia amplitudowej charakterystyki transmittancji $G_0(s)$, definiowaną wzorem $|G_0(j\omega_{gc})| = 1$, zaś przez M_p oznaczono zapas fazy zamkniętego układu regulacji.

Tabela 4.2. Wyniki obliczeń – przykład 4.2.1

| k | k_c | $ e_{d_1}(\infty) $ | $ e_{d_2}(\infty) $ | ω_{gc} [rad · s ⁻¹] | M_p | ω_{pc} [rad · s ⁻¹] |
|-----|--------|---------------------|---------------------|--|--------|--|
| 0 | 2.0790 | 0.3878 | 0.1939 | 146.7 | 54.23° | 66.32 |
| 1 | 4.0351 | 0.1986 | 0.1986 | 185.9 | 64.26° | 73.13 |
| 2 | 6.1317 | 0.1310 | 0.1966 | 210.7 | 68.33° | 76.65 |
| 3 | 8.3326 | 0.0968 | 0.1936 | 228.0 | 70.26° | 79.23 |

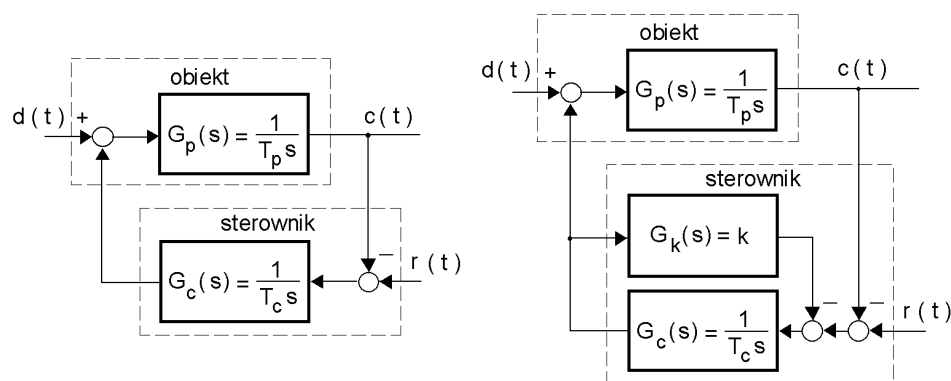
Z przedstawionych wyników wnioskujemy, że dla dostatecznie dużych wartości wzmocnienia k kaskadowa regulacja zapewnia układowi wymagany zapas stabilności oraz zadaną dokładność. Osiąga się to, kompensując wpływ dominującej stałej czasowej T_1 regulowanego obiektu przez objęcie odpowiedniego fragmentu tego obiektu korekcyjnym sprzężeniem zwrotnym. Wartość wypadkowej stałej czasowej \bar{T}_1 maleje wówczas w miarę wzrostu parametru k . Z danych zawartych w tabeli 4.2 wynika ponadto, że zwiększając wartość tej nastawy, uzyskuje się wzrost wartości pulsacji odcięcia ω_{gc} , a zatem w takiej sytuacji należy spodziewać się przyspieszenia procesów regulacji (zalecamy Czytelnikowi wykonanie odpowiednich eksperymentów symulacyjnych). Biorąc pod uwagę warunki praktycznej implementacji rozważanego algorytmu regulacji, najkorzystniejszym rozwiązaniem wydaje się przyjęcie nastawy $k = 1$, której odpowiada standardowa struktura kaskadowa pokazana na rys. 4.26.



Rys. 4.26. Strukturalny schemat kaskadowego układu regulacji

Przykład 4.2.2 Na rys. 4.27a pokazano strukturalny schemat pewnego układu zamkniętego.

- Pokaż, że w układzie tym nie można osiągnąć jakiegokolwiek celu regulacji, z uwagi na jego strukturalną niestabilność.
- Jaki jest najprostszy środek stabilizującej korekcji tego układu, jeżeli dopuszcza się niezerowy uchyb ustalony, będący reakcją na skokowe zakłócenie $d(t)$?
- Zakładając, że jednostkowe zakłócenie skokowe $d(t)$ nie powinno powodować ustalonego uchybu większego niż 0.01, wyznacz parametry odpowiedniego korektora.
- Jaka jest dokładność odtwarzania skokowo zmieniającego się sygnału zadanego $r(t)$ dla układu uzyskanego w punktach **b)** i **c)**?



Rys. 4.27. Schemat układu regulacji: **a)** układ strukturalnie niestabilny, **b)** układ skorygowany

Rozwiązanie

- Z transmitancji układu zamkniętego (rys. 4.27a), $C(s)/R(s) = 1/(1 + T_c T_p s^2)$, wynika, że niezależnie od wartości parametrów T_c oraz T_p nie można spełnić koniecznego i wystarczającego warunku stabilności tego układu – układ jest więc strukturalnie niestabilny.
- Układ z rysunku 4.27a można ustabilizować tylko wtedy, gdy zmieni się jego strukturę. Ponieważ dopuszcza się występowanie niezerowych

ustalonych uchybów, będących reakcją na skokowe zakłócenia na wejściu obiektu, najprostszym środkiem takiej korekcji jest zastosowanie sztywnego sprzężenia zwrotnego przekształcającego regulator typu I w regulator typu P z inercją. Tak skorygowany układ przedstawia się jak na rys. 4.27b.

- c) Wyznaczywszy zakłóceniovą transmitancję $C(s)/D(s) = (k + T_c s)(1 + kT_p s + T_c T_p s^2)$ układu z rys. 4.34b, stwierdzamy, że układ ten jest stabilny dla dowolnych T_c , T_p i k większych od zera. Z wymagania, by ustalony uchyb regulacji wywołany zakłóceniem skokowym $d(t) = 1(t)$ nie przekraczał 0.01, otrzymujemy zatem warunek $0 < k \leq 0.01$.
- d) Zamknięty układ regulacji, uzyskany w punktach **b)** i **c)**, jest układem astatycznym pierwszego rzędu w odniesieniu do sygnału zadającego, co oznacza, że ustalony uchyb odtwarzania skokowo zmieniającego się sygnału zadającego jest zerowy.

Przykład 4.2.3 Operatorową transmitancję $G(s)$ pewnego stabilnego układu regulacji z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym przedstawiono w następującej czynnikowej postaci, w której wyróżniono bieguny p_i , $i = 1, \dots, n$, oraz zera z_i , $i = 1, \dots, m$, tej transmitancji:

$$G(s) = k_0 \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad k_0 \neq 0, \quad m < n. \quad (4.34)$$

Zakładając, że rozpatrywany układ jest układem astatycznym pierwszego rzędu, wyznacz współczynnik prędkościowego wzmocnienia tego układu.

Rozwiązanie Operatorowa transmitancja otwartego układu regulacji dana jest wzorem

$$G_0(s) = \frac{G(s)}{1 - G(s)} = \frac{k_0 \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i) - k_0 \prod_{i=1}^m (s - z_i)}. \quad (4.35)$$

Z założenia o stopniu astatyzmu układu (4.34) wynika, że $G(s)|_{s=0} = 1$, a zatem

$$k_0 \prod_{i=1}^m (-z_i) = \prod_{i=1}^n (-p_i). \quad (4.36)$$

Współczynnik prędkościowego wzmocnienia definiuje się jako

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} (sG_0(s)).$$

Zgodnie ze wzorem (4.35) otrzymuje się wyrażenie

$$\begin{aligned} k_v &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_0 s \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i) - k_0 \prod_{i=1}^m (s - z_i)} \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} \frac{k_0 \prod_{i=1}^m (s - z_i) + k_0 s \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\frac{d}{ds} \prod_{i=1}^n (s - p_i) - k_0 \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^m (s - z_i)}. \end{aligned}$$

Jak łatwo zauważyć, zachodzą związki:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^n (s - p_i) &= \lim_{s \rightarrow 0} \left(\prod_{i=1}^n (s - p_i) \cdot \sum_{i=1}^n (s - p_i)^{-1} \right) \\ &= - \prod_{i=1}^n (-p_i) \cdot \sum_{i=1}^n p_i^{-1} \\ \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d}{ds} \prod_{i=1}^m (s - z_i) &= - \prod_{i=1}^m (-z_i) \cdot \sum_{i=1}^m z_i^{-1}. \end{aligned}$$

Na tej podstawie mamy

$$k_v = \frac{k_0 \prod_{i=1}^m (-z_i)}{k_0 \prod_{i=1}^m (-z_i) \cdot \sum_{i=1}^m z_i^{-1} - \prod_{i=1}^n (-p_i) \cdot \sum_{i=1}^n p_i^{-1}}$$

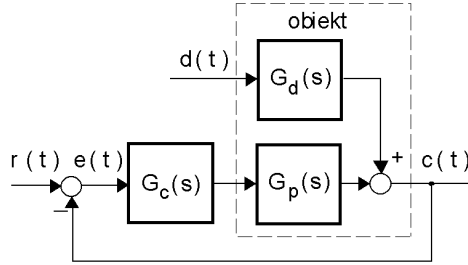
skąd, po uwzględnieniu własności (4.36), otrzymuje się poszukiwaną zależność współczynnika prędkościowego wzmocnienia od biegunów oraz zer transmitancji układu zamkniętego

$$\frac{1}{k_v} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}.$$

Przykład 4.2.4 Strukturalny schemat, będący modelem pewnego zamkniętego układu regulacji, przedstawia się jak na rys. 4.28, gdzie

$$G_p(s) = \frac{10}{0.1 + s}, \quad G_c(s) = k_c + \frac{k_i}{s}, \quad G_d(s) = \frac{-0.5}{0.1 + s}$$

oznaczają transmitancje, odpowiednio: sterowanego obiektu, regulatora *PI* oraz kanału zakłócenia. Przyjmując dodatkowo wartości parametrów regulatora k_c oraz k_i , zbadaj ustaloną wartość uchybu regulacji w tym układzie, przy założeniu sygnału zadającego oraz zakłócenia w postaci jednostkowych skoków położeniowego i prędkościowego.



Rys. 4.28. Strukturalny schemat układu regulacji

Rozwiązanie Uchyb regulacji wyznaczamy ze wzoru

$$e(t) = r(t) - c(t) = e_r(t) + e_d(t)$$

gdzie $e_r(t)$ jest uchybem regulacji w układzie, nie podlegającym oddziaływaniu zakłóceń (uchyb sygnałowy), zaś $e_d(t)$ jest reakcją zamkniętego układu na zakłócenia (uchyb zakłóceniovowy). Zaczniemy od wyznaczenia składnika $e_r(\infty)$ uchybu $e(\infty)$. Zakładając, że rozpatrywany zamknięty układ regulacji jest stabilny (co, jak łatwo sprawdzić, zachodzi dla dowolnych założonych dodatnich wartości k_c oraz k_i), mamy $e_r(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} (sR(s)(1 - G_{rc}(s)))$, gdzie

$$G_{rc}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}.$$

Składnik $e_r(\infty)$ uchybu dany jest wzorem

$$e_r(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{sR(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}.$$

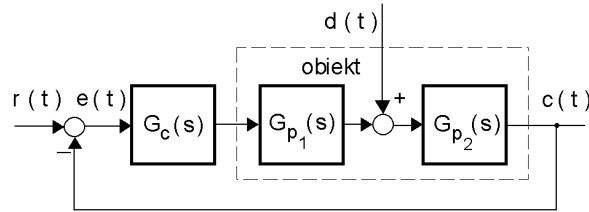
W rozważanym przypadku mamy $G_c(s)G_p(s) = 10(k_i + k_c s)/(s(0.1 + s))$. Ze względu na sygnał zadający układ regulacji charakteryzuje się a-statem pierwszym rzędu. Ustalony uchyb pochodzący od skokowego sygnału zadającego ($R(s) = 1/s$) równa się zero, natomiast w przypadku prędkościowego sygnału zadającego ($R(s) = 1/s^2$) otrzymamy $e_r(\infty) = 1/k_v$, gdzie $k_v = \lim_{s \rightarrow 0} (sG_c(s)G_p(s)) = 100k_i$ jest stosownym wzmocnieniem prędkościowym. Dla zakłóceniovowego składnika uchybu zachodzi $e_d(\infty) = -\lim_{s \rightarrow 0} (sD(s)G_{dc}(s))$, gdzie $G_{dc}(s)$ oznacza zakłóceniovą transmitancję układu zamkniętego. Jak łatwo sprawdzić, obowiązują następujące zależności:

$$G_{dc}(s) = \frac{C(s)}{D(s)} = \frac{G_d(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)} = -\frac{0.5s}{10k_i + (10k_c + 0.1)s + s^2}$$

$$e_d(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(D(s) \frac{0.5s^2}{10k_i + (10k_c + 0.1)s + s^2} \right).$$

Ze względu na zakłóceniewe wejście badany układ regulacji przedstawia się jako astatyczny pierwszego rzędu. Tak więc obserwujemy zerową wartość uchybu ustalonego dla zakłócenia skokowego oraz niezerowy uchyb odtwarzania sygnału prędkościowego, wynoszący $e_d(\infty) = 0.05/k_i$.

Przykład 4.2.5 Rozważmy strukturalny schemat układu regulacji jak na rys. 4.29.



Rys. 4.29. Strukturalny schemat układu regulacji

Model regulowanego obiektu składa się z dwóch członów dynamicznych $G_{p1}(s)$ oraz $G_{p2}(s)$, zaś regulator PID zastosowany w układzie opisany jest transmitancją $G_c(s)$, przy czym:

$$G_{p1}(s) = \frac{3}{4+s}, \quad G_{p2}(s) = \frac{1}{s(3+s)}, \quad G_c(s) = \frac{2.5(0.1+s)(4.2+s)}{s}.$$

Wyznacz wartości pięciu początkowych sygnałowych współczynników uchybowych e_{r_i} , $i = 0, \dots, 4$, oraz pięciu początkowych zakłóceniewych współczynników uchybowych e_{d_i} , $i = 0, \dots, 4$, tego układu. Oblicz wartość ustalonego uchybu $e_r(\infty)$ przy pobudzeniu układu zadającym sygnałem o postaci $r(t) = r_0(t) = 2 + 0.4t + 0.25t^2$, $t \geq 0$, oraz ustalonego uchybu $e_d(\infty)$ przy pobudzeniu zakłóceniem $d(t) = d_0(t) = 1.5 + 0.3t$, $t \geq 0$. Jaka byłaby wartość ustalonego uchybu $e_d(\infty)$ w przypadku $d(t) = r_0(t)$? Ponadto, wyznacz prędkościowe oraz przyspieszeniowe wzmocnienie rozważanego układu regulacji.

Rozwiązanie Sygnałowa transmitancja uchybowa układu regulacji dana jest wzorem

$$G_{re}(s) = \frac{E(s)}{R(s)} = \frac{1}{1 + G_c(s)G_{p1}(s)G_{p2}(s)} \quad (4.37)$$

$$= \frac{12s^2 + 7s^3 + s^4}{3.15 + 32.25s + 19.5s^2 + 7s^3 + s^4}.$$

Zakłóceniovą transmitancję uchybową tego układu określa wzór

$$\begin{aligned} G_{de}(s) &= \frac{E(s)}{D(s)} = \frac{-G_{p2}(s)}{1 + G_c(s)G_{p1}(s)G_{p2}(s)} \\ &= \frac{-4s - s^2}{3.15 + 32.25s + 19.5s^2 + 7s^3 + s^4}. \end{aligned}$$

Przedstawmy daną transmitancję $G_e(s)$ w postaci następującego szeregu potęgowego

$$G_e(s) = \sum_{i=0}^{\infty} e_i s^i, \quad e_i = \frac{1}{i!} \left. \frac{d^i}{ds^i} G_e(s) \right|_{s=0}, \quad i = 0, 1, \dots \quad (4.38)$$

Współczynniki e_i , $i = 0, 1, \dots$, tego szeregu zwane są współczynnikami uchybowymi. Łatwo stwierdzić, że ich znajomość zezwala na ocenę uchybów ustalonych dla wymuszenia dowolnego rzędu. Przykładowo, w przypadku stabilnego układu oraz jednostkowego sygnału $r(t) = 1(t)$ wartość ustalonego uchybu obliczamy zgodnie z formułą

$$e_r(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \left(sR(s) \sum_{i=0}^{\infty} e_i s^i \right) = \lim_{s \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{\infty} e_i s^i.$$

Jak widać, warunkiem zerowania się tego uchybu jest, aby $e_0 = 0$. Wyznaczanie współczynników uchybowych według wzoru (4.38) nie jest dogodną metodą. Odpowiednie rachunki można w istotny sposób uprościć, stosując następujący rekurencyjny algorytm, wynikający z dzielenia wielomianu licznikowego danej transmitancji $G_e(s)$ przez jej wielomian mianownikowy. Zapiszmy transmitancję $G_e(s)$ w postaci następującej wymiernej funkcji zmiennej zespolonej s :

$$G_e(s) = \frac{\sum_{i=0}^n b_i s^i}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, \quad a_0 \neq 0.$$

Zgodnie ze wzorem (4.38) zachodzi $\sum_{i=0}^n a_i s^i \cdot \sum_{i=0}^{\infty} e_i s^i = \sum_{i=0}^n b_i s^i$. Porównując współczynniki przy kolejnych potęgach zmiennej s w wyrażeniu po lewej stronie powyższego wyrażenia z odpowiednimi współczynnikami licznika transmitancji $G_e(s)$, uzyskujemy poszukiwany rekurencyjny algorytm obliczania uchybowych współczynników tej transmitancji:

$$e_i = \begin{cases} e_0 = \frac{b_0}{a_0} & \text{dla } i = 0, \\ \frac{1}{a_0} \left(b_i - \sum_{j=1}^i a_j e_{i-j} \right) & \text{dla } i = 1, \dots, n, \\ -\frac{1}{a_0} \sum_{j=1}^n a_j e_{i-j} & \text{dla } i > n. \end{cases}$$

Stosując ten algorytm, otrzymano następujące wartości zakłóceńowych współczynników uchybowych rozważanych transmitancji:

$$\begin{aligned} G_{re}(s) &= 0 + 0s + 3.8095s^2 - 36.78s^3 + 353.292s^3 + \dots \\ G_{de}(s) &= 0 - 1.2698s + 12.6833s^2 - 121.9919s^3 + 1173.2706s^4 + \dots \end{aligned}$$

Rozpatrywany układ regulacji jest układem stabilnym w sensie *BIBO*, zatem w przypadku wielomianowych pobudzeń $r(t) = r_0(t)$ oraz $d(t) = d_0(t)$ ustalone uchyby $e_r(\infty)$ oraz $e_d(\infty)$ przyjmują wartość: $e_r(\infty) = 3.8095 \cdot 2 \cdot 0.25 = 1.905$ oraz $e_d(\infty) = -1.2698 \cdot 0.3 = -0.381$. Ponieważ współczynnik e_{d_1} ma wartość różną od zera, zatem $|e_d(t)|$ dla zakłócenia $d(t) = r_0(t)$ narasta w czasie w sposób nieograniczony. Niech $G_0(s) = G_c(s)G_{p_1}(s)G_{p_2}(s)$ oznacza transmitancję układu otwartego. Ze wzoru (4.37) wynika, że

$$G_0(s) = \frac{1 - G_{re}(s)}{G_{re}(s)}.$$

Współczynniki wzmocnienia prędkościowego (k_v) oraz wzmocnienia przyspieszeniowego (k_a) rozważanego układu regulacji definiuje się jako

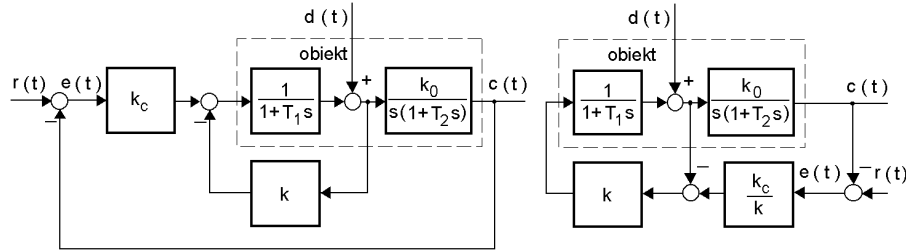
$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} (sG_0(s)) \quad \text{oraz} \quad k_a = \lim_{s \rightarrow 0} (s^2G_0(s)).$$

Jak łatwo sprawdzić, obowiązują następujące równości:

$$\begin{aligned} k_v &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } e_{r_0} \neq 0 \\ e_{r_1}^{-1} & \text{gdy } e_{r_0} = 0 \end{cases} \\ k_a &= \begin{cases} 0 & \text{gdy } e_{r_0} \neq 0 \text{ lub } e_{r_1} \neq 0 \\ e_{r_2}^{-1} & \text{gdy } e_{r_0} = 0 \text{ oraz } e_{r_1} = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Mamy zatem $k_v = \infty$ oraz $k_a = 0.2625$.

Zadanie 4.2.1 Strukturalny schemat układu regulacji dano na rys. 4.30a, przy czym regulowany obiekt opisany jest parametrami: $k_0 = 1.5 \text{ s}^{-1}$, $T_1 = 0.2 \text{ s}$ oraz $T_2 = 0.07 \text{ s}$.



Rys. 4.30. Schemat układu regulacji: a) struktura kaskadowa, b) standardowa struktura kaskadowa

W układzie zastosowano dwa regulatory proporcjonalne: regulator o wzmacnieniu k_c w torze głównym oraz regulator pomocniczy o wzmacnieniu k w korekcyjnym torze wewnętrznego sprzężenia zwrotnego. Zakładamy ponadto, że na obiekt oddziałuje zakłócenie $d(t)$ w postaci jednostkowego skoku położeniowego.

Wyznacz takie wzmacnienia k_c oraz k , które zapewnią temu układowi ograniczenie ustalonego uchybu pochodzącego od zakłócenia do wartości $|e(\infty)| = 0.1$ przy zapasie wzmacnienia $M_g = 12$ dB. Jaki jest zapas fazy tak zaprojektowanego układu regulacji?

Odpowiedź Parametry regulatorów określone są formułami

$$k_c = \frac{1}{|e(\infty)|} \quad \text{oraz} \quad k = \frac{-T_1 - 2T_2 + \sqrt{T_1^2 + 4k_c k_0 T_1 T_2^2 \cdot 10^{M_g/20}}}{2T_2}.$$

Zachodzi zatem $k_c = 10$ oraz $k = 1.31095$. Zapas fazy rozważanego układu regulacji wynosi $M_p = 43.7^\circ$. Na rys. 4.30b przedstawiono ten układ w postaci odpowiadającej standardowej kaskadowej strukturze. Zauważmy, że stosując regulator jedynie w torze głównym (to znaczy przyjmując $k = 0$), nie można spełnić postawionych wymagań. Żądanie $M_g = 12$ dB prowadzi do wzmacnienia $k_c = 3.2296$, któremu odpowiada ustalony uchyb o wartości $|e(\infty)| = 0.3096$, przekraczającej dopuszczalną wartość (zapas fazy takiego układu wynosi $M_p = 38.4^\circ$). Z kolei, spełnienie wymagania dotyczącego statycznej dokładności ($|e(\infty)| = 0.1$) prowadzi do wzmacnienia $k_c = 10$, lecz tak uzyskany układ charakteryzuje się zbyt małym zapasem stabilności: $M_g = 2.2$ dB oraz $M_p = 6.5^\circ$.

Zadanie 4.2.2 Dana jest operatorowa transmitancja $G(s)$ zamkniętego układu regulacji z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym

$$G(s) = k_0 \cdot \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{i=1}^n (s - p_i)}, \quad G(s)|_{s=0} = 1, \quad m < n.$$

Współczynnik przyspieszeniowego wzmocnienia k_a tego układu zdefiniowany jest wzorem $k_a = \lim_{s \rightarrow 0} (s^2 G_0(s))$, gdzie przez $G_0(s)$ oznaczono operatorową transmitancję układu otwartego, odpowiadającego transmitancji $G(s)$. Określ zależność tego współczynnika od wartości biegunów p_i , $i = 1, \dots, n$, oraz zer z_i , $i = 1, \dots, m$, transmitancji $G(s)$.

Odpowiedź Przyspieszeniowe wzmocnienie k_a rozważanego układu regulacji wynika ze wzoru

$$\frac{2}{k_a} = -\frac{1}{k_v^2} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i^2} + \sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i^2} \quad \text{oraz} \quad \frac{1}{k_v} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{z_i} - \sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i}.$$

Zadanie 4.2.3 Transmitancja sygnałowego toru ($R(s) \rightarrow C(s)$) pewnego układu regulacji ma postać

$$G_{rc}(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 + b_1 s + \dots + b_{n-1} s^{n-1}}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}.$$

Definiując uchyb regulacji jako $E(s) = R(s) - C(s)$, sformułuj konieczne i wystarczające warunki istnienia skończonych wartości ustalonego uchybu **a)** położeniowego oraz **b)** prędkościowego tego układu.

Odpowiedź Transmitancja uchybowa dana jest wzorem

$$\begin{aligned} G_{re}(s) &= \frac{E(s)}{R(s)} = 1 - G_{rc}(s) \\ &= \frac{(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)s + \dots + (a_{n-1} - b_{n-1})s^{n-1} + a_n s^n}{a_0 + a_1 s + \dots + a_n s^n}. \end{aligned}$$

a) Koniecznym i wystarczającym warunkiem istnienia skończonego uchybu położeniowego jest stabilność układu. Uchyb taki ma wartość

$$e(t)|_{t \rightarrow \infty} = \frac{a_0 - b_0}{a_0}.$$

Koniecznym i wystarczającym warunkiem zerowania się uchybu położeniowego jest zatem stabilność układu oraz spełnienie równości $a_0 = b_0$.

- b) Koniecznym i wystarczającym warunkiem istnienia skończonego uchybu prędkościowego jest stabilność układu oraz spełnienie równości $a_0 = b_0$. Wartość takiego uchybu wynosi

$$e(t)|_{t \rightarrow \infty} = \frac{a_1 - b_1}{a_0}.$$

Stąd konieczny i wystarczający warunek zerowania się uchybu prędkościowego: stabilność układu, $a_0 = b_0$ oraz $a_1 = b_1$.

Zauważmy, że powyższe wnioski obowiązują niezależnie od postaci sprzężenia zwrotnego zastosowanego w układzie regulacji. Co w szczególności oznacza, że podane wzory mogą być używane w przypadku złożonych struktur z dodatnim sprzężeniem zwrotnym. Zachęcamy Czytelnika do sformułowania analogicznych wniosków dla układów regulacji z opóźnieniem, a więc dla przypadków transmitancji (modeli) niewymiernych.

Zadanie 4.2.4 Dana jest transmitancja zamkniętego układu regulacji z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{l_0 + l_1 s + l_2 s^2}{72 + 54s + 13s^2 + s^3}$$

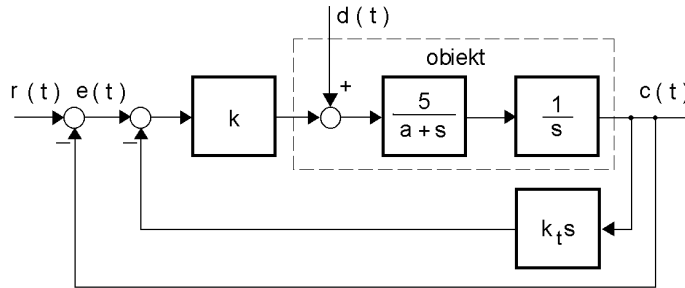
gdzie przez $G_0(s)$ oznaczono transmitancję głównego toru tego układu. Wyznacz takie wartości współczynników l_0 , l_1 oraz l_2 , aby:

- układ regulacji posiadał astatyzm drugiego rzędu,
- wartość ustalonego uchybu przy pobudzeniu prędkościowym $t \cdot 1(t)$ nie przekraczała 0.1,
- ustalony uchyb przy pobudzeniu przyspieszeniowym $t^2/2 \cdot 1(t)$ nie przekraczał 0.05.

Odpowiedź Wymagane wartości współczynników licznika transmitancji $G(s)$ wynoszą:

- $l_0 = 72$, $l_1 = 54$ oraz $l_2 \neq 13$;
- $l_0 = 72$, $46.8 < l_1 < 61.2$, l_2 dowolne;
- $l_0 = 72$, $l_1 = 54$ oraz $9.4 < l_2 < 16.6$.

Zadanie 4.2.5 Rozważmy układ regulacji (serwomotor prądu stałego, rys. 4.31) z pomocniczym sygnałem pomiarowym w postaci pochodnej wielkości sterowanej (co odpowiada tachometrycznemu sprzężeniu zwrotnemu). Wiadomo, że w układzie tym przy wyłączonym sprzężeniu tachometrycznym ($k_t = 0$) czas ustalania skokowej odpowiedzi wynosi $T_{s2\%} = 0.981$ s, zaś przeregulowanie tej odpowiedzi ma wartość $\kappa = 0.6$.



Rys. 4.31. Strukturalny schemat układu regulacji z tachometrycznym sprzężeniem

Oblicz wartości nastaw k oraz k_t , przy których rozważany układ regulacji posiada zapas fazy równy $M_p = 50^\circ$, zaś ustalony uchyb dla krytycznego jednostkowego skokowego zakłócenia, występującego na wejściu obiektu, równa się $|e(\infty)| = 0.002$.

Odpowiedź Na podstawie informacji, dotyczących skokowej odpowiedzi układu bez tachometrycznego sprzężenia zwrotnego, można dokonać przybliżonej identyfikacji parametru a transmitancji obiektu regulacji. W tym celu stosujemy wzór $a \approx -2 \ln(0.02 \sqrt{1 - \zeta_0^2}) / T_{s2\%}$, przy czym wartość $\zeta_0 = 0.1605$ wynika ze wzoru (3.5). Na tej podstawie mamy $a = 8 \text{ s}^{-1}$. Parametr k wyznaczamy w oparciu o wymaganie dotyczące uchybu: $k = 1/|e(\infty)| = 500$. Z kolei, parametr k_t obliczamy ze wzoru $k_t = 2\zeta_t \tau_t - 8/(5k) = 0.01591 \text{ s}$, w którym przyjmujemy $\tau_t = 1/\sqrt{5k} = 0.02 \text{ s}$ oraz $\zeta_t = 0.4777$ (zob. wzór (4.33)).

Powyższe wyniki opierają się na przybliżonym oszacowaniu czasu ustalania $T_{s2\%}$ odpowiedzi skokowej układu regulacji bez sprzężenia tachometrycznego. Dokładny wzór, uzależniający $T_{s2\%}$ od współczynnika τ skali czasu wzorcowej transmitancji drugiego rzędu (xxxx) dla współczynnika tłumienia ζ_0 odpowiadającego przeregulowaniu $\kappa = 0.6$, ma postać $T_{s2\%} = 23.09\tau$. Wynika stąd, że 'dokładna' wartość parametru a wynosi $a = 2 \cdot 23.09 \cdot \zeta_0 / T_{s2\%} = 7.555 \text{ s}^{-1}$. Ponieważ wartość ta niewiele odbiega od oszacowania

$a = 8 \text{ s}^{-1}$, można spodziewać się, że własności 'rzeczywistego' układu regulacji będą się tylko nieznacznie różniły od nominalnych własności (zapas fazy takiego 'rzeczywistego' układu regulacji równa się $M_p = 49.63^\circ$).

Zadanie 4.2.6 Układ regulacji składa się z obiektu o transmitancji

$$G_p(s) = \frac{1}{(1+s)^2(2+s)}$$

oraz proporcjonalnego regulatora o wzmacnieniu k , objętych jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym. Sprawdź, czy dobierając wzmacnienie k można zapewnić ustalony uchyb $|e(\infty)| < 0.01$ przy jednostkowym skokowym sygnale zadającym. Jeżeli nie jest to możliwe, określ minimalną wartość tego uchybu, możliwą do uzyskania w układzie regulacji.

Odpowiedź Minimalna ze względu na stabilność zamkniętego układu regulacji wartość uchybu ustalonego wynosi $|e(\infty)|_{\min} = 0.1$. Oszacowanie to ma jednak walor tylko teoretyczny. Niezbędne jest bowiem uwzględnienie odpowiedniego zapasu stabilności. Przykładowo, przyjmując zapas wzmacnienia $M_g = 6 \text{ dB}$, uzyskuje się 'praktyczną' ocenę ustalonego uchybu, możliwego do uzyskania w tym układzie: $|e(\infty)|_{\min} = 0.182$.

Zadanie 4.2.7 Dynamiczny obiekt opisany operatorową transmitancją

$$G_p(s) = \frac{k_p}{1 + T_p s} = \frac{12}{1 + 0.4s}$$

sterowany jest w układzie zamkniętym z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym za pomocą regulatora całkującego $G_c(s) = 1/(T_i s)$.

- a) Oblicz wartość stałej całkowania T_i tego regulatora, dla której skokowa odpowiedź układu regulacji charakteryzuje się przeregulowaniem $\kappa = 0.2$. Dla tak zaprojektowanego układu oszacuj ustaloną wartość uchybu śledzenia jednostkowego prędkościowego sygnału zadającego.
- b) Zakładając, że uchyb ten nie powinien przekraczać 0.1, wyznacz odpowiednią wartość stałej całkowania T_i regulatora $G_c(s)$, a następnie oszacuj przeregulowanie κ skokowej odpowiedzi otrzymanego w ten sposób układu zamkniętego.

Jaki jest zapas fazy M_p w każdym z powyższych przypadków?

Odpowiedź

- a) Wartość stałej całkowania, zapewniającej zamkniętemu układowi skokową odpowiedź o przeregulowaniu κ , wynika ze wzoru $T_i = 4\zeta^2 k_p T_p$, gdzie ζ określone jest formułą (3.5). Dla $\kappa = 0.2$ otrzymuje się $\zeta = 0.45595$, czemu odpowiada $T_i = 3.9915$ s, a w konsekwencji: ustalony prędkościowy uchyb $e(\infty) = T_i/k_p = 0.33262$ s oraz zapas fazy $M_p = 48.148^\circ$.
- b) Dla $e(\infty) = 0.1$ otrzymuje się stałą całkowania $T_i = k_p e(\infty) = 1.2$ s oraz skokową odpowiedź o przeregulowaniu $\kappa = 0.44434$. Zapas fazy wynosi w tym przypadku $M_p = 28.02^\circ$.

Zadanie 4.2.8 Dany jest układ regulacji z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym, złożony z obiektu o operatorowej transmitancji $G_p(s)$ oraz regulatora *PID* opisanego idealizowaną transmitancją $G_c(s)$, gdzie

$$G_p(s) = \frac{5}{(1+s)^2(2+s)} \quad \text{oraz} \quad G_c(s) = 3 + \frac{2}{s} + 2s.$$

Oblicz wartości pięciu początkowych sygnałowych współczynników uchybowych e_i , $i = 0, \dots, 4$, rozważanego układu regulacji. Określ na tej podstawie rząd astatyzmu tego układu. Wyznacz wartość ustalonego uchybu śledzenia zadającego sygnału o postaci $r(t) = 3 + 0.5t$, $t \geq 0$.

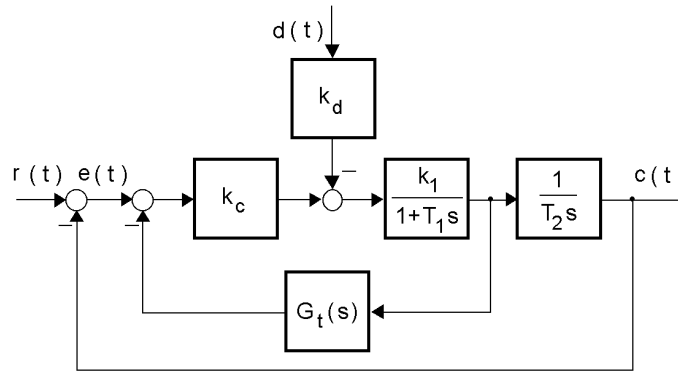
Odpowiedź Początkowe uchybowe współczynniki rozważanego układu regulacji dane są wzorem

$$\begin{aligned} G_{re}(s) &= \frac{E(s)}{R(s)} = e_0 + e_1s + e_2s^2 + e_3s^3 + e_4s^4 + \dots \\ &= 0 + 0.2s + 0.16s^2 - 0.172s^3 + 0.0724s^4 + \dots \end{aligned}$$

Układ regulacji posiada zatem astatyzm pierwszego rzędu. Wartość ustalonego uchybu śledzenia zakładanego pobudzenia $r(t)$ wynosi

$$e(\infty) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(e_1 \cdot \frac{dr(t)}{dt} \right) = 0.1.$$

Zadanie 4.2.9 Strukturalny schemat pokazany na rys. 4.32 jest modelem pewnego serwomechanizmu. Na układ ten działa zadający sygnał w postaci prędkościowego skoku $r(t) = c_1 t \cdot 1(t)$ oraz zakłócenie w postaci skoku położeniowego $d(t) = d \cdot 1(t)$ (moment obciążenia).



Rys. 4.32. Schemat serwomechanizmu

- a) Wyznacz ustalony uchyb $e(\infty) = e_r(\infty) + e_d(\infty)$ w zależności od prędkości c_1 narastania sygnału zadającego i intensywności zakłócenia d w przypadku, gdy $G_t(s) = 0$.
- b) Wyznacz ustalony uchyb prędkościowy $e_r(\infty)$ w przypadku, w którym zastosowano proporcjonalne ('sztywne') sprzężenie zwrotne $G_t(s) = k_t$, $k_t > 0$, oraz w przypadku, gdy korekcyjne sprzężenie zwrotne ma charakter dynamiczny: $G_t(s) = sT_t/(1 + sT_0)$. Jaka wartość przyjmuje ustalony uchyb położeniowy $e_d(\infty)$ pochodzący od zakłócenia $d(t)$?

Odpowiedź

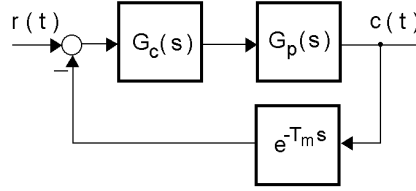
- a) Ustalony uchyb wynosi $e(\infty) = e_r(\infty) + e_d(\infty) = T_2c_1/(k_c k_1) + k_d d/k_c$.
- a) W przypadku proporcjonalnego sprzężenia korekcyjnego, ustalony uchyb prędkościowy wynosi $e_r(\infty) = T_2c_1/(k_c k_1) + k_t T_2c_1$. Z kolei, w przypadku dynamicznego korekcyjnego sprzężenia zwrotnego ustalony uchyb prędkościowy równa się $e_r(\infty) = T_2c_1/(k_c k_1)$.

4.3 Badanie skutków niepewności nominalnego modelu obiektu

Przykład 4.3.1 Na rys. 4.33 dany jest schemat układu regulacji złożonego z obiektu o transmitancji $G_p(s)$, całkującego regulatora $G_c(s)$ oraz czujnika modelowanego za pomocą członu opóźniającego $e^{-T_m s}$, przy czym:

$$G_p(s) = \frac{k_p}{(1 + T_p s)^2} \quad \text{oraz} \quad G_c(s) = \frac{1}{T_i s}$$

gdzie $k_p = 30$, zaś $T_p = 0.15$ s.



Rys. 4.33. Strukturalny schemat układu regulacji

Projektując regulator, pominięto obecność opóźnienia: wartość stałej całkowania dobrano w ten sposób, aby przy $T_m = 0$ układ zamknięty charakteryzował się zapasem wzmocnienia $M_g = 12$ dB. Jaka jest krytyczna wartość $T_{m\max}$ pomiarowego opóźnienia T_m , dla której tak zaprojektowany układ znajdzie się na granicy stabilności? Zakładając, że opóźnienie T_m występujące w rzeczywistym układzie regulacji przyjmuje ową krytyczną wartość $T_m = T_{m\max}$, tak skoryguj stałą całkowania regulatora, aby zapewnić temu układowi wymagany zapas wzmocnienia $M_g = 12$ dB.

Rozwiązanie Niech $\tilde{G}_0(j\omega)$ oznacza widmową transmitancję układu otwartego przy $T_m = 0$. Pulsacja odcięcia fazowej charakterystyki tej transmitancji wynosi $\omega_{pc} = 1/T_p$. Zachodzi przy tym $|\tilde{G}_0(j\omega_{pc})| = k_p T_p / (2T_i)$. Aby zatem osiągnąć dany zapas M_g , stała całkowania T_i musi spełniać ograniczenie $10^{M_g/20} \cdot k_p T_p = 2T_i$. Oznaczmy przez \tilde{T}_i odpowiednią wartość stałej całkowania: $\tilde{T}_i = 10^{M_g/20} \cdot k_p T_p / 2 = 8.957$ s. Rozważmy z kolei układ regulacji z opóźnieniem. Niech $G_0(s)$ będzie operatorową transmitancją układu otwartego, zaś ω_{gc} oznacza pulsację odcięcia amplitudowej charakterystyki tego układu, zdefiniowaną wzorem $|G_0(j\omega_{gc})| = 1$. Ponieważ w tym przypadku zachodzi $|G_0(j\omega)| = |\tilde{G}_0(j\omega)|$, $\forall \omega$, zatem przy ustalonej wartości stałej całkowania T_i , pulsację ω_{gc} wyznacza się rozwiązując równanie $T_i T_p^2 \omega_{gc}^3 + T_i \omega_{gc} - k_p = 0$. Równanie to, po podstawieniu liczbowych wartości k_p , T_p oraz $T_i = \tilde{T}_i$, przyjmuje postać $\omega_{gc}^3 + 44.4444\omega_{gc} - 148.8525 = 0$. Poszukiwana wartość pulsacji odcięcia ω_{gc} wynosi zatem $\omega_{gc} = 2.836$ rad \cdot s $^{-1}$, zaś argument transmitancji $\tilde{G}_0(j\omega)$ dla tej pulsacji ma wartość $\arg \tilde{G}_0(j\omega_{gc}) = -2.375$ rad = -136.08° . Wynika stąd, że zapas fazy dla $T_m = 0$ wynosi $M_p = 43.92^\circ$. W przypadku, gdy w układzie występuje opóźnienie $T_m \geq 0$, argument $\arg G_0(j\omega_{gc})$ określony jest wzorem

$$\arg G_0(j\omega_{gc}) = \arg \tilde{G}_0(j\omega_{gc}) - \omega_{gc} T_m$$

z którego wynika krytyczna wartość $T_{m_{\max}}$ opóźnienia

$$T_{m_{\max}} = \frac{\pi + \arg \tilde{G}_0(j\omega_{gc})}{\omega_{gc}} = 0.2702 \text{ s.}$$

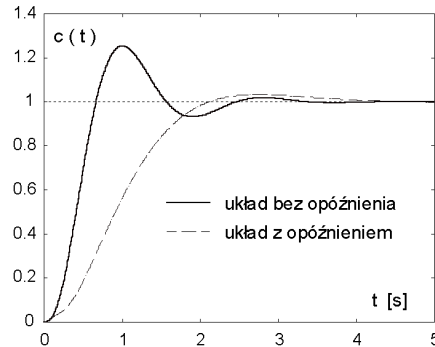
Od układu regulacji wymaga się, aby dla $T_m = T_{m_{\max}}$ charakteryzował się zapasem wzmocnienia $M_g = 12 \text{ dB}$ – co prowadzi do warunku

$$|G_0(j\omega_{gc})| = \frac{k_p}{\omega_{gc} T_i (1 + \omega_{gc}^2 T_p^2)} = 10^{-M_g/20}.$$

Poszukiwaną wartość nastawy T_i regulatora, zapewniającą temu układowi wymaganą odporność na wpływ pomiarowego opóźnienia w torze sprzężenia zwrotnego, wyznacza się zatem ze wzoru

$$T_i = \frac{k_p \cdot 10^{M_g/20}}{\omega_{gc} (1 + \omega_{gc}^2 T_p^2)} = 35.66 \text{ s.}$$

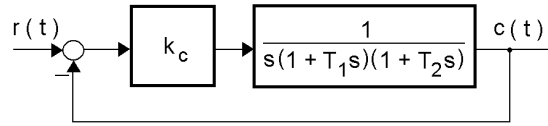
Nastawa ta jest istotnie większa od wartości $\tilde{T}_i = 8.957 \text{ s}$, obliczonej przy założeniu $T_m = 0 \text{ s}$. Badając skokową odpowiedź tak zaprojektowanego układu regulacji, należy się zatem spodziewać, że będzie ona wolniejsza od odpowiedzi układu o takim samym zapasie wzmocnienia, lecz bez opóźnienia w torze sprzężenia zwrotnego ($T_m = 0 \text{ s}$). Uwagę tę potwierdzają przebiegi odpowiedzi skokowych pokazane na rys. 4.34.



Rys. 4.34. Porównanie odpowiedzi skokowych układu regulacji

Przykład 4.3.2 Dany jest strukturalny schemat układu serwowatora z proporcjonalnym regulatorem jak na rys. 4.35, przy czym $T_1 > 0$ oraz $T_2 > 0$ oznaczają rzeczywiste wartości stałych czasowych obiektu regulacji.

Projektując regulator, przyjmuje się następujące nominalne wartości tych stałych czasowych: $\bar{T}_1 = 0.1$ s oraz $\bar{T}_2 = 0.0125$ s. Należy dobrać wzmacnienie k_c regulatora, zapewniające nominalnemu zamkniętemu układowi zapas wzmacnienia $M_g = 8$ dB.



Rys. 4.35. Strukturalny schemat układu regulacji

Następnie dla tak nastawionego regulatora należy określić zakres zmienności stałych czasowych T_1 oraz T_2 , dopuszczalny ze względu na stabilność układu zamkniętego.

Rozwiązanie Mamy równanie charakterystyczne układu zamkniętego

$$k_c + s + (T_1 + T_2)s^2 + T_1 T_2 s^3 = 0.$$

Maksymalna wartość wzmacnienia $k_{c_{\max}}$ proporcjonalnego regulatora, dopuszczalna ze względu na stabilność tego układu, wynosi zatem

$$k_{c_{\max}} = \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = \frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2}.$$

Po podstawieniu nominalnych wartości stałych czasowych \bar{T}_1 oraz \bar{T}_2 otrzymuje się $k_{c_{\max}} = 90 \text{ s}^{-1}$. Wartość wzmacnienia k_c , odpowiadającego zadanemu zapasowi $M_g = 8$ dB, wynika zatem ze wzoru

$$k_c = k_{c_{\max}} \cdot 10^{-M_g/20} = 35.8296 \text{ s}^{-1}.$$

Jak łatwo zauważyć, przy $k_c > 0$ wystarczający warunek stabilności układu zamkniętego przyjmuje postać

$$T_1 + T_2 > k_c T_1 T_2.$$

Rozważamy przykładową sytuację, w której proporcjonalny regulator o wzmacnieniu $k_c = 35.8296 \text{ s}^{-1}$ zaprojektowano korzystając z modelu o

dokładnie zidentyfikowanej pierwszej stałej czasowej, co oznacza, że $\bar{T}_1 = T_1$. Zamknięty układ regulacji z obiektem o niepewnej wartości drugiej stałej czasowej T_2 zachowa stabilność, o ile spełniona będzie nierówność

$$0 < T_2 < \frac{\bar{T}_1}{k_c \bar{T}_1 - 1} = 0.0387 \text{ s.}$$

Przykład 4.3.3 Załóżmy, że zbiór modeli pewnego obiektu regulacji można sparametryzować w następujący sposób

$$G_p(s) = (1 + T_z s) \cdot G_0(s) \quad \text{oraz} \quad T_{z\min} \leq T_z \leq T_{z\max}. \quad (4.39)$$

We wzorze powyższym transmitancja $G_0(s)$ charakteryzuje znany (i wolny od wszelkiej niepewności) fragment dynamiki rozważanego obiektu, zaś parametr T_z , przyjmujący dowolną (lecz nieznaną) wartość z podanego przedziału, służy do opisu wpływu założonej parametrycznej niepewności modelu tego obiektu – to znaczy niepewności położenia zera jego 'rzeczywistej' transmitancji $G_p(s)$.

Wyznacz standardową multiplikatywną reprezentację takiego zbioru niepewnych modeli, przyjmując

$$G_p(s) = \bar{G}_p(s) \cdot (1 + \Delta(s) \cdot W_m(s)) \quad (4.40)$$

gdzie $\bar{G}_p(s)$ oznacza nominalny model obiektu regulacji, $\Delta(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ jest pewną funkcją o jednostkowo ograniczonym module ($|\Delta(j\omega)| \leq 1, \forall \omega$), zaś $W_m(s)$ to odpowiednio dobrana funkcja wążąca.

Rozwiązanie Załóżmy nominalny model obiektu zgodny ze wzorem

$$\bar{G}_p(s) = (1 + \bar{T}_z s) \cdot G_0(s) \quad (4.41)$$

gdzie

$$\bar{T}_z = \frac{T_{z\min} + T_{z\max}}{2} \quad (4.42)$$

jest uśrednioną wartością niepewnego parametru T_z . Na podstawie wzorów (4.39)-(4.41) otrzymujemy

$$\frac{(T_z - \bar{T}_z)s}{1 + \bar{T}_z s} = \Delta(s) \cdot W_m(s). \quad (4.43)$$

Jak łatwo zauważyć, gdy $\bar{T}_z = 0$, musimy przyjąć niewłaściwą (wielomianową) postać funkcji wążącej $W_m(s) = T_{z_{\max}} s$ oraz statyczną zmienną $\Delta(s) = \Delta \in [-1, 1]$.

Z kolei w przypadku, w którym $\bar{T}_z \neq 0$, ze wzorów (4.42) oraz (4.43) wnioskujemy, że

$$\frac{2T_z - T_{z_{\min}} - T_{z_{\max}}}{T_{z_{\min}} + T_{z_{\max}}} \cdot \frac{\bar{T}_z s}{1 + \bar{T}_z s} = \Delta(s) \cdot W_m(s). \quad (4.44)$$

Zdefiniujmy współczynnik

$$r_{T_z} = \frac{T_{z_{\max}} - T_{z_{\min}}}{T_{z_{\min}} + T_{z_{\max}}}$$

pełniący rolę względnej miary niepewności parametru T_z . Uwzględniając tę definicję we wzorze (4.44), otrzymujemy formułę

$$\left(\frac{2T_z}{T_{z_{\max}} - T_{z_{\min}}} - \frac{1}{r_{T_z}} \right) \cdot \frac{r_{T_z} \bar{T}_z s}{1 + \bar{T}_z s} = \Delta \cdot W_m(s).$$

Widzimy, że pierwszy czynnik wyrażenia po lewej stronie powyższej równości odpowiada równaniu odcinka o końcach w punktach $(T_{z_{\min}}, -1)$ oraz $(T_{z_{\max}}, 1)$. Na tej podstawie przyjmujemy funkcję wążącą w postaci

$$W_m(s) = \frac{r_{T_z} \bar{T}_z s}{1 + \bar{T}_z s}.$$

Podobnie jak w przypadku $\bar{T}_z = 0$, mamy teraz $\Delta(s) = \Delta \in [-1, 1]$.

Warto także zauważyć, że dla dowolnej wartości parametru \bar{T}_z obowiązuje dogodna formuła

$$W_m(s) = \frac{\Delta_{T_z} s}{1 + \bar{T}_z s}$$

w której

$$\Delta_{T_z} = \frac{T_{z_{\max}} - T_{z_{\min}}}{2}.$$

A ponadto, dla $\bar{T}_z \neq 0$ zachodzi oczywista równość $\Delta_{T_z} = r_{T_z} \bar{T}_z$.

Przykład 4.3.4 Niech $\bar{P}(s)$ oznacza nominalny model pewnego obiektu dynamicznego.

Zakładając, że 'rzeczywista' transmitancja tego obiektu należy do zbioru

$$\mathcal{P} = \{P(s) = \bar{P}(s) \cdot e^{-T_0 s}, 0 \leq T_0 \leq T_{0\max}\}$$

gdzie T_0 jest nieznaną wartością transportowego opóźnienia, wyznacz standardową multiplikatywną reprezentację takiego zbioru modeli z parametryczną niepewnością.

Rozwiązanie Rozważmy następujący zbiór:

$$\mathcal{P}_m = \{\bar{P}(s) \cdot (1 + \Delta(s) \cdot W_m(s)), \|\Delta\|_\infty \leq 1\}$$

gdzie $W_m(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ jest odpowiednią dla tego przypadku funkcją ważącą, zdefiniowaną w taki sposób, aby $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_m$. Oznacza to, iż dla dowolnego modelu $P(s) \in \mathcal{P}$ rozważanego obiektu – czyli dla każdej dopuszczalnej wartości opóźnienia T_0 – istnieje taka funkcja $\Delta(s) \in \mathcal{H}_\infty$ o jednostkowo ograniczonej normie, że $1 + \Delta(s) \cdot W_m(s) = e^{-T_0 s}$.

Funkcję ważącą $W_m(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ należy zatem dobrać tak, aby spełniona była nierówność

$$\left| \frac{P(j\omega)}{\bar{P}(j\omega)} - 1 \right| \leq |W_m(j\omega)|, \quad \forall \omega, T_0$$

czyli

$$|e^{-jT_0\omega} - 1| \leq |W_m(j\omega)|, \quad \forall \omega, T_0.$$

Kładąc $D(\omega) = D(\omega, T_0) = |e^{-jT_0\omega} - 1|$, z łatwością stwierdzamy, że

$$D(\omega) = \sqrt{2(1 - \cos(T_0\omega))}, \quad \min D(\omega) = 0 \quad \text{oraz} \quad \max D(\omega) = 2.$$

Funkcja $D(\omega)$ swoje pierwsze maksimum osiąga dla pulsacji $\omega^*(T_0) = \pi/T_0$, $T_0 > 0$. Dla $0 \leq \omega \leq \omega^*(T_0)$ funkcja ta ma przebieg monotonicznie rosnący o asymptotycznym nachyleniu $+20\text{dB}/\text{dek}$ (co łatwo jest sprawdzić, korzystając z przybliżenia $\cos(T_0\omega) \approx 1 - T_0^2\omega^2/2$, $T_0\omega \in \mathcal{O}(0)$). Najmniejszą interesującą nas wartością pulsacji $\omega^*(T_0)$ jest $\omega^*(T_{0\max}) = \pi/T_{0\max}$.

Powyższe spostrzeżenia nasuwają myśl, aby jako funkcję ważącą przyjąć

$$W_m(s) = \frac{ks}{1 + T_{0\max}s} \quad (4.45)$$

o odpowiednio dobranej wartości parametru $k > 0$. Żądając, aby $D(\omega, T_{0\max}) \leq |W_m(j\omega)|, \forall \omega$, otrzymujemy warunek

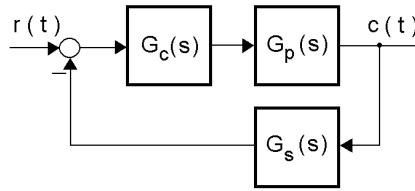
$$\left. \frac{k\omega}{\sqrt{1 + T_{0\max}^2 \omega^2}} \right|_{\omega=\omega^*(T_{0\max})} \geq 2$$

z którego wynika poszukiwane nierównościowe ograniczenie na parametr k

$$k \geq 2\sqrt{1 + \pi^{-2}} \cdot T_{0\max}.$$

Warto podkreślić, że powyższa prosta funkcja wążąca (4.45) nie jest jedyną postacią tej funkcji. Przykładowo, dopuszczalna jest funkcja stała $W_m(s) = W_m = 2$. Praktyczne znaczenie takiego rozwiązania jest jednak niewielkie, ze względu na jego zbyt 'zachowawczy' charakter (por. *przykład 4.3.x*). Zachęcamy Czytelnika do porównania amplitudowych charakterystyk Bodego funkcji $e^{-jT_0\omega} - 1$ oraz odpowiednio sparametryzowanej funkcji wążącej (4.45).

Zadanie 4.3.1 Dany jest układ regulacji o schemacie jak na rys. 4.xx.



Rys. 4.xx. Strukturalny schemat układu regulacji

Obiekt regulacji opisany jest operatorową transmitancją

$$G_p(s) = \frac{1}{(1 + T_1 s)(1 + T_2 s)}, \quad T_1 = 0.2 \text{ s}, \quad T_2 = 0.04 \text{ s}$$

ponadto w układzie stosuje się regulator całkujący o transmitancji $G_c(s) = k_c/s$, zaś transmitancja $G_s(s) = 1/(1 + T_0 s)$, $T_0 \geq 0$, modeluje własności czujnika wielkości sterowanej.

Od układu zamkniętego żąda się zapasu wzmocnienia $M_g = 10 \text{ dB}$. Nastawiając regulator, przyjęto upraszczające założenie $T_0 = 0 \text{ s}$, co oznacza, że uznano wpływ dynamiki czujnika jako pomijalny. Jaką wartość k_c nastawy regulatora uzyskano? Zbadaj odporność stabilności układu regulacji zaprojektowanego w taki sposób, określając maksymalną dopuszczalną wartość stałej czasowej T_0 czujnika, dla której układ ten zachowa stabilność.

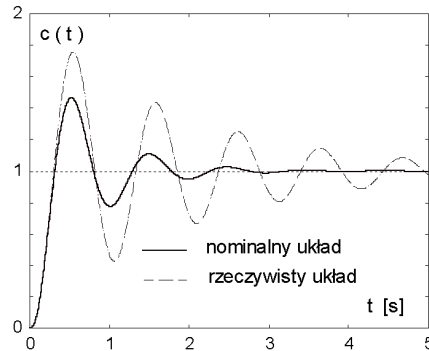
Odpowiedź Przy $T_0 = 0$ s żądany zapas wzmocnienia zapewnia

$$k_c = 10^{-M_g/20} \cdot \frac{T_1 + T_2}{T_1 T_2} = 9.4868 \text{ s}^{-1}.$$

Przedział dopuszczalnych zmian stałej czasowej $T_0 \geq 0$ czujnika wynika z analizy nierówności $a_0 + a_1 T_0 + a_2 T_0^2 < 0$, gdzie

$$\begin{aligned} a_0 &= T_1 T_2 (k_c T_1 T_2 - T_1 - T_2) \\ a_1 &= (T_1 + T_2) (2k_c T_1 T_2 - T_1 - T_2) \\ a_2 &= (T_1 + T_2) (k_c (T_1 + T_2) - 1). \end{aligned}$$

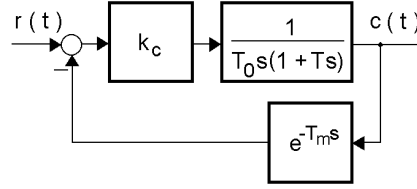
Dopuszczalna wartość stałej czasowej czujnika wynosi $T_{0\max} = 0.10855$ s. Rys. 4.22 ilustruje destabilizujący wpływ niepewności modelu sprzężenia zwrotnego: pokazano tam odpowiedzi skokowe nominalnego układu ($T_0 = 0$ s) oraz przykładowego układu 'rzeczywistego', w którym $T_0 = T_{0\max}/2$.



Rys. 4.22. Ilustracja wpływu niedokładności modelowania toru pomiarowego

Zadanie 4.3.2 Schemat serwomechanizmu złożonego z silnika prądu stałego, proporcjonalnego regulatora oraz czujnika położenia wału silnika przedstawiony jest na rys. 4.28. Parametry operatorowej transmitancji silnika mają postać: $T_0 = 0.05$ s oraz $T = 0.2$ s. Przyjęto, że dynamikę czujnika modelować można za pomocą idealnego członu opóźniającego $e^{-T_m s}$, $T_m \geq 0$.

Zakładając zerową wartość opóźnienia T_m tego członu, dobierz wzmocnienie k_c proporcjonalnego regulatora, zapewniające odpowiedzi skokowej zamkniętego układu przeregulowanie $\kappa = 0.2$. Jaki jest nominalny zapas



Rys. 4.28. Strukturalny schemat serwomechanizmu

fazy M_p tak zaprojektowanego układu regulacji? Następnie, zachowując obliczoną wartość wzmocnienia k_c , określ krytyczną wartość $T_{m_{\max}}$ pomiarowego opóźnienia, przy której zamknięty układ znajdzie się na granicy stabilności. Jaka jest wówczas wartość pulsacji nietłumionych drgań? Porównaj przebiegi odpowiedzi skokowych nominalnego układu zamkniętego ($T_m = 0$) oraz przykładowego 'rzeczywistego' układu zamkniętego ($0 < T_m < T_{m_{\max}}$). Na koniec, zmodyfikuj wzmocnienie k_c regulatora w taki sposób, aby dla wyznaczonej krytycznej wartości $T_{m_{\max}}$ pomiarowego opóźnienia zamknięty układ regulacji charakteryzował się zakładanym zapasem fazy M_p .

Odpowiedź Wzmocnienie regulatora dla $T_m = 0$ wyznaczamy zgodnie z formułą $k_c = T_0 / (4\zeta^2 T)$, przy czym współczynnik tłumienia ζ dany jest znanym wzorem (3.5). A zatem przy $\zeta = 0.4559$ wzmocnienie to osiąga wartość $k_c = 0.3006$, czemu odpowiada zapas fazy $M_p = 48.14^\circ$. Niech $k = k_c / T_0 = 6.0141 \text{ s}^{-1}$. Krytyczna wartość opóźnienia w torze sprzężenia zwrotnego wynosi

$$T_{m_{\max}} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1 + 4k^2 T^2} - 1)}}{\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1 + 4k^2 T^2} - 1)}} \cdot T = 0.1876 \text{ s.}$$

Pulsacja nietłumionych drgań układu na granicy stabilności ma wartość

$$\omega_n = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{1 + 4k^2 T^2} - 1)}}{T} = 4.4794 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

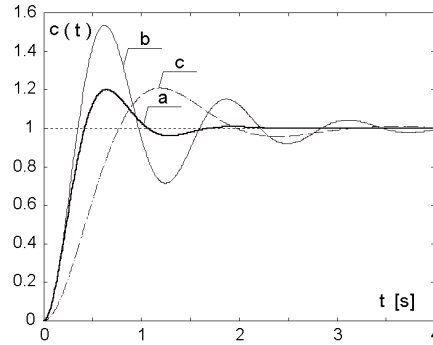
Zmodyfikowane wzmocnienie regulatora dla $T_m = T_{m_{\max}}$ wyznacza się ze wzoru

$$k_c = \omega_{gc} T_0 \sqrt{1 + \omega_{gc}^2 T^2} = 0.10346$$

przy czym odpowiednią wartość pulsacji odcięcia $\omega_{gc} = 1.9304 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ uzyskuje się, rozwiązując nieliniowe równanie

$$\omega_{gc} = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan(\omega_{gc}T) - M_p}{T_{m_{\max}}}.$$

Na rys. 4.29 pokazano wyniki komputerowych symulacji.



Rys. 4.29. Ilustracja wpływu opóźnienia w torze sprzężenia zwrotnego układu regulacji – porównanie skokowych odpowiedzi: **a**) układ bez opóźnienia ($T_m = 0$, $k_c = 0.3006$), **b**) układ z opóźnieniem bez modyfikacji ($T_m = T_{m_{\max}}/2 = 0.0938$ s, $k_c = 0.3006$), **c**) układ z opóźnieniem z modyfikacją ($T_m = T_{m_{\max}} = 0.1876$ s, $k_c = 0.10346$)

Zadanie 4.3.3 Dany jest zbiór modeli pewnego obiektu regulacji

$$G_p(s) = \frac{1}{s-p} \cdot G_0(s), \quad p_{\min} \leq p \leq p_{\max}$$

gdzie $G_0(s)$ jest znanym czynnikiem operatorowej transmitancji tego obiektu, zaś parametr p pozwala na uwzględnienie parametrycznej niepewności modelowania (identyfikacji), obejmującej wartość jednego bieguna tej transmitancji. Warto zwrócić uwagę na fakt, iż w ogólnym przypadku niepewność, o której mowa, może dotyczyć także oceny stabilności czynnika $1/(s-p)$.

Wyznacz standardową ilorazową (odwrotną multiplikatywną) reprezentację powyższego zbioru niepewnych modeli, przyjmując

$$G_p(s) = \frac{\bar{G}_p(s)}{1 + \Delta(s) \cdot W_i(s)} \quad (4.46)$$

gdzie $\bar{G}_p(s)$ oznacza nominalny model obiektu regulacji, $\Delta(s) \in \mathcal{RH}_\infty$ jest znormalizowaną funkcją ($|\Delta(j\omega)| \leq 1, \forall \omega$), zaś $W_i(s)$ to odpowiednio dobrana funkcja wążąca.

Odpowiedź Model nominalny ma postać

$$\bar{G}_p(s) = \frac{1}{s - \bar{p}} \cdot G_0(s), \quad \text{gdzie} \quad \bar{p} = \frac{p_{\min} + p_{\max}}{2}.$$

Gdy $\bar{p} = 0$, przyjmujemy $W_i(s) = p_{\max}/s$ oraz $\Delta(s) = \Delta \in [-1, 1]$. Dla $\bar{p} \neq 0$, zachowując tę statyczną postać funkcji $\Delta(s)$, mamy ponadto

$$W_i(s) = \frac{r_p \bar{p}}{s - \bar{p}}, \quad \text{gdzie} \quad r_p = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{p_{\min} + p_{\max}}.$$

Zauważmy, że w obu wyróżnionych przypadkach zachodzi

$$W_i(s) = \frac{p_{\max} - p_{\min}}{2} \cdot \frac{1}{s - \bar{p}}.$$

Zadanie 4.3.4 Rozważmy zbiór modeli

$$G_p(s) = \frac{1}{1 + T_p s} \cdot G_0(s), \quad T_{p_{\min}} \leq T_p \leq T_{p_{\max}}$$

gdzie $G_0(s)$ jest znanym czynnikiem transmitancji operatorowej danego obiektu dynamicznego, zaś parametr T_p pozwala na uwzględnienie w opisie tego obiektu niepewności co do wartości wyróżnionej stałej czasowej. W ogólnym przypadku niepewność modelu dotyczy zatem także jego stabilności.

Wyznacz standardową ilorazową (odwrotną multiplikatywną) reprezentację powyższego zbioru niepewnych modeli, przyjmując $G_p(s)$ zgodnie ze wzorem (4.46).

Odpowiedź Model nominalny ma postać

$$\bar{G}_p(s) = \frac{1}{1 + \bar{T}_p s} \cdot G_0(s), \quad \text{gdzie} \quad \bar{T}_p = \frac{T_{p_{\min}} + T_{p_{\max}}}{2}.$$

Gdy $\bar{T}_p = 0$, przyjmujemy $W_i(s) = T_{p_{\max}} s$ oraz $\Delta(s) = \Delta \in [-1, 1]$. Dla $\bar{T}_p \neq 0$ oraz funkcji $\Delta(s)$ o takiej samej statycznej postaci, mamy

$$W_i(s) = \frac{r_{T_p} \bar{T}_p s}{1 + \bar{T}_p s}, \quad \text{gdzie} \quad r_{T_p} = \frac{T_{p_{\max}} - T_{p_{\min}}}{T_{p_{\min}} + T_{p_{\max}}}.$$

Ponadto, dla dowolnego \bar{T}_p zachodzi

$$W_i(s) = \frac{T_{p_{\max}} - T_{p_{\min}}}{2} \cdot \frac{s}{1 + \bar{T}_p s}.$$

Warto porównać widmowe własności funkcji $W_i(s)$ wyznaczonych w niniejszym zadaniu oraz *zadaniu 4.4.3*. Zachęcamy także Czytelnika do wykonania obliczeń i wyciągnięcia analogicznych wniosków dla zbioru modeli $(1 + T_z s) \cdot G_0(s)$ rozważanych w *przykładzie 4.3.3* oraz dla odpowiednich modeli $(s - z) \cdot G_0(s)$ z zerem o niepewnej wartości z .

Zadanie 4.3.5 Dany jest wejściowo-wyjściowy model z niepewnym wzmocnieniem: $G_p(s) = k \cdot G_0(s)$, gdzie $k_{\min} \leq k \leq k_{\max}$ jest liczbą rzeczywistą, zaś $G_0(s)$ oznacza znaną transmitancję operatorową.

Zakładając, że $k_{\min} + k_{\max} \neq 0$, wyznacz standardową multiplikatywną oraz odwrotną multiplikatywną reprezentację powyższego modelu.

Odpowiedź Kładąc

$$\bar{k} = \frac{k_{\min} + k_{\max}}{2}, \quad \tilde{k} = 2 \frac{k_{\min} k_{\max}}{k_{\min} + k_{\max}} \quad \text{oraz} \quad r_k = \frac{k_{\max} - k_{\min}}{k_{\min} + k_{\max}}$$

a ponadto przyjmując, że $\Delta \in \mathbb{R}$, $|\Delta| \leq 1$, otrzymujemy następujące modele, w których uwzględnia się rozważany typ parametrycznej niepewności:

$$G_p(s) = \bar{k} G_0(s) \cdot (1 + \Delta \cdot r_k)$$

oraz

$$G_p(s) = \frac{\tilde{k} G_0(s)}{1 + \Delta \cdot r_k}.$$

Zauważmy, że w praktycznie istotnym przypadku – to znaczy wtedy, gdy $\bar{k} \neq \tilde{k}$ – modele nominalne $\bar{k} G_0(s)$ oraz $\tilde{k} G_0(s)$, związane z powyższymi reprezentacjami niepewności, różnią się.

Zadanie 4.3.6 Załóżmy, że wartość wybranego dowolnego parametru α operatorowej transmitancji danego obiektu dynamicznego zmienia się w przedziale $\alpha \in [\alpha_{\min}, \alpha_{\max}]$, gdzie $\alpha_{\min} < \alpha_{\max}$ (zob. *przykład 4.3.3* oraz *zadania 4.3.3-4.3.x*).

Korzystając z następująco zdefiniowanych pomocniczych zmiennych:

$$\bar{\alpha} = \frac{\alpha_{\min} + \alpha_{\max}}{2} \quad \text{oraz} \quad r_\alpha = \frac{\alpha_{\max} - \alpha_{\min}}{\alpha_{\min} + \alpha_{\max}}, \quad \alpha_{\min} + \alpha_{\max} \neq 0$$

sformułuj wystarczające warunki, przy których taki przedziałowy model niepewności dopuszcza zmianę znaku parametru α .

Odpowiedź Warunki wystarczające (lecz nie konieczne!) to: $\bar{\alpha} = 0$ lub $r_\alpha > 1$.

Zadanie 4.3.7 Dany zbiór modeli

$$G_p(s) = \frac{1}{1 + as + s^2}, \quad a_{\min} \leq a \leq a_{\max}.$$

Kładąc $a = \bar{a} + \Delta_a \cdot \Delta$, gdzie $\bar{a} = (a_{\min} + a_{\max})/2$, $\Delta_a = (a_{\max} - a_{\min})/2$ oraz $-1 \leq \Delta \leq 1$, wyznacz odpowiednią standardową zmodyfikowaną ilorazową reprezentację tego zbioru niepewnych modeli.

Odpowiedź Standardowa zmodyfikowana ilorazowa reprezentacja ma postać (por. wzór (4.46))

$$G_p(s) = \frac{\bar{G}_p(s)}{1 + \Delta \cdot \bar{G}_p(s) \cdot W_i(s)}$$

w której $\bar{G}_p(s)$ oznacza model nominalny, zaś $W_i(s)$ jest funkcją wazącą, przy czym

$$\bar{G}_p(s) = \frac{1}{1 + \bar{a}s + s^2}, \quad \text{oraz} \quad W_i(s) = \Delta_a s.$$