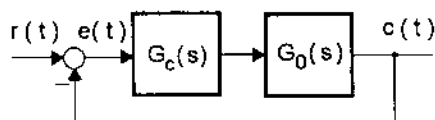


**PRZYKŁAD 3 (ZWIĘKSZANIE STATYCZNEJ DOKŁADNOŚCI - STEROWNIK TYPU LAG)**

- Na układ sterowania (rys. 6.12) składa się
  - **wstępnie skorygowany obiekt** opisany operatorową transmitancją

$$G_0(s) = \frac{1}{s(1+s)(2+s)},$$

- **sterownik** o transmitancji  $G_c(s)$ .



Rys. 6.12. Strukturalny schemat układu sterowania.

- **Oszacuj ustalony błąd odtwarzania jednostkowego sygnału prędkościowego dla  $G_c(s) = 1$ .**
- **Wyznacz parametry transmitancji  $G_c(s)$  sterownika opóźniającego fazę lag, który zapewni dziesięciokrotne zmniejszenie tego błędu.**

**Rozwiązanie**

- Transmitancja zamkniętego układu sterowania przy  $G_c(s) = 1$ :

$$G(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{1 + 2s + 3s^2 + s^3} = \frac{1}{(2.32472 + s) [0.56228^2 + (0.33764 + s)^2]}.$$

Na tej podstawie wnioskujemy, iż para

$$s^*, \bar{s}^* = -\alpha^* \pm j\beta^* = -0.33764 \pm j0.56228$$

stanowi parę **biegunów dominujących** transmitancji  $G(s)$ .

- **Prędkościowe wzmocnienie  $k_v$  układu sterowania ( $G_c(s) = 1$ ):**

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_0(s) = 0.5 s^{-1},$$

czemu odpowiada ustalony błąd śledzenia jednostkowego sygnału prędkościowego

$$e_v(\infty) = \frac{1}{k_v} = 2s.$$

- **Skokowa odpowiedź** tego układu charakteryzuje się (symulacja - MATLAB):

**przeregulowaniem**  $\kappa = 0.1446$ ,

**czasami ustalania**  $T_{s5\%} = 8.5151s$  oraz  $T_{s2\%} = 9.2129s$ .

- **Czasy ustalania błędu śledzenia prędkościowego sygnału zadającego:**

$$T_{vs5\%} = 7.0042s \quad \text{oraz} \quad T_{vs2\%} = 11.409s.$$

- **Transmitancja projektowanego sterownika lag** ma postać:

$$G_c(s) = \frac{-z+s}{-p+s}, \text{ przy czym } z < p < 0, z = \beta p \text{ oraz } \beta > 1.$$

- Ponieważ

$$G_c(0) = z/p = \beta,$$

zatem żądając **dziesięciokrotnego zwiększenia statycznej dokładności sterowania**, musimy przyjąć

$$\beta = 10,$$

czemu odpowiada ustalony błąd śledzenia jednostkowego sygnału prędkościowego

$$e'_v(\infty) = 0.2s.$$

- Wartość parametru  $p$  wyznaczymy, biorąc pod uwagę następujące ograniczenie

$$p \geq \frac{(\alpha^*)^2 + (\beta^*)^2}{(\beta - 1)\beta^*} \cdot \text{tg}\delta_p.$$

Rozważymy dwa zbiory parametrów sterownika *lag*,  
odpowiadające dwóm wartościom swobodnego parametru  $\delta_p$  :

$$\delta_p = -5^\circ : \quad p = -0.0074368 \quad \text{oraz} \quad z = -0.074368 ;$$

$$\delta_p = -2^\circ : \quad p = -0.0029684 \quad \text{oraz} \quad z = -0.029684 .$$

- Niech  $\exp(\sigma t)$  oznacza najwolniejszy mod, występujący w skokowej oraz prędkościowej odpowiedzi układu sterowania ze sterownikiem *lag*, zaś  $h_\sigma$  oraz  $h_{v\sigma}$  będą odpowiednimi współczynnikami udziału tego modu.

Zachodzi przy tym:

$$\delta_p = -5^\circ : \quad \sigma = -0.086257, \quad h_\sigma = 0.18866, \quad h_{v\sigma} = -2.18724 ;$$

$$\delta_p = -2^\circ : \quad \sigma = -0.031384, \quad h_\sigma = 0.060978, \quad h_{v\sigma} = -1.94294 .$$

- Oszacujmy wartości wskaźników odpowiedzi skokowej oraz odpowiedzi prędkościowej każdego z uzyskanych układów sterowania.

Obliczenia opieramy na następujących (wcześniej wyprowadzonych) formułach:

$$\tilde{\kappa} = \kappa + \tilde{h}_\sigma ,$$

$$\tilde{h}_\sigma = \frac{\sigma - z}{z}, \quad \tilde{T}_{\sigma\Delta_s} = \sigma^{-1} \cdot \ln \left| \frac{\Delta_s}{\tilde{h}_\sigma} \right| \quad (\text{przy } |\tilde{h}_\sigma| \leq \Delta_s),$$

$$\tilde{h}_{v\sigma} = \frac{\sigma - z}{\sigma z}, \quad \tilde{T}_{v\sigma\Delta_s} = \sigma^{-1} \cdot \ln \left| \frac{\Delta_s e^{\nu(\infty)}}{\tilde{h}_{v\sigma}} \right| \quad (\text{przy } |\tilde{h}_{v\sigma}| \geq |\Delta_s e^{\nu(\infty)}|),$$

przy czym przez  $\tilde{T}_{\sigma\Delta_s}$  oraz  $\tilde{T}_{v\sigma\Delta_s}$  oznaczono *czasy zaniku modu*  $\exp(\sigma t)$  .

Dla rozważanych sterowników uzyskano:

$$\begin{aligned} \delta_p = -5^\circ: \quad & \tilde{\kappa} = 0.30449, \\ & \tilde{h}_\sigma = 0.15987, \quad \tilde{T}_{\sigma 5\%} = 13.4749 \text{ s}, \quad \tilde{T}_{\sigma 2\%} = 24.0977 \text{ s}, \\ & \tilde{h}_{v\sigma} = -1.85335, \quad \tilde{T}_{v\sigma 5\%} = 60.5420 \text{ s}, \quad \tilde{T}_{v\sigma 2\%} = 71.1648 \text{ s}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_p = -2^\circ: \quad & \tilde{\kappa} = 0.20191, \\ & \tilde{h}_\sigma = 0.057289, \quad \tilde{T}_{\sigma 5\%} = 4.3359 \text{ s}, \quad \tilde{T}_{\sigma 2\%} = 33.5317 \text{ s}, \\ & \tilde{h}_{v\sigma} = -1.82539, \quad \tilde{T}_{v\sigma 5\%} = 165.91 \text{ s}, \quad \tilde{T}_{v\sigma 2\%} = 195.1057 \text{ s}. \end{aligned}$$

Na drodze symulacji wyznaczono następujące wartości wskaźników:

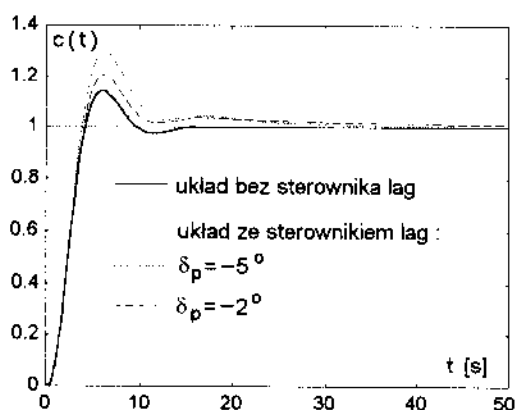
$$\begin{aligned} \delta_p = -5^\circ: \quad & \kappa = 0.29943, \quad T_{s5\%} = 11.1470 \text{ s}, \quad T_{s2\%} = 25.6690 \text{ s}, \\ & T_{vs5\%} = 62.4507 \text{ s}, \quad T_{vs2\%} = 73.0810 \text{ s}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta_p = -2^\circ: \quad & \kappa = 0.20851, \quad T_{s5\%} = 9.86197 \text{ s}, \quad T_{s2\%} = 35.4930 \text{ s}, \\ & T_{vs5\%} = 167.8870 \text{ s}, \quad T_{vs2\%} = 197.0951 \text{ s}. \end{aligned}$$

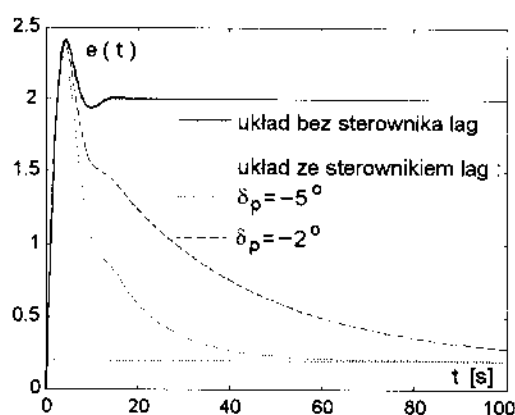
- Przejściowe procesy sterowania zilustrowano na rysunkach:

rys. 6.13 - odpowiedzi skokowe ,

rys. 6.14 - błędy odtwarzania jednostkowego prędkościowego sygnału zadającego.



Rys. 6.13. Odpowiedzi skokowe.



Rys. 6.14. Błąd śledzenia sygnału prędkościowego.

## **KOMENTARZ:**

W rozważanym przypadku:

- (1) Sterownik opóźniający fazę (*lag*) pozwala na zmniejszenie ustalonego błędu prędkościowego. Odbywa się to kosztem:**
  - **obniżenia szybkości procesów przejściowych w fazie bliskiej stanowi ustalonemu - zjawisko tak zwanego 'przeciągania' (dotyczy to zwłaszcza odpowiedzi prędkościowej układu zamkniętego),**
  - **wzrostu wartości przeregulowania skokowej odpowiedzi układu zamkniętego (układ o astatyzmie pierwszego stopnia).**
  
- (2) Zmniejszanie wartości swobodnego parametru  $|\delta_p|$  prowadzi do:**
  - **nasilania się niekorzystnego zjawiska przeciągania,**
  - **ograniczenia wzrostu przeregulowania odpowiedzi skokowej.**

#### PRZYKŁAD 4 (STEROWNIK PID)

- Obiekt o operatorowej transmitancji

$$G_p(s) = \frac{21}{s(1.4 + s)(3.2 + s)(4.8 + s)}$$

jest sterowany za pomocą sterownika **PID** o transmitancji (*idealny model*)

$$G_c(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s$$

w układzie z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym (rys. 6.15).

- Wyznacz takie wartości nastaw  $k_p$ ,  $k_i$  oraz  $k_d$  tego sterownika, aby spełnione były następujące wymagania w zakresie **stabilności**, **szybkości** oraz **dokładności**:
  - **zapas fazy**  $\Delta_p \cong 55^\circ$ ,
  - **czas ustalania odpowiedzi skokowej**  $T_{s5\%} \cong 3\text{ s}$ ,
  - **wzmocnienie przyspieszeniowe**  $k_a = 0.03\text{ s}^{-2}$  (**układ typu 2**).

#### Rozwiązanie

- Zakłada się, iż *dynamiczne własności zamkniętego układu sterowania* zdeterminowane są parą **dominujących zespolonych sprzężonych biegunów transmitancji tego układu**

$$(s^*, \bar{s}^*) = (-\alpha^* + j\beta^*, -\alpha^* - j\beta^*).$$

- **Bieguny te wyznaczamy na podstawie wymagań odnoszących się do stabilności układu zamkniętego oraz szybkości procesów przejściowych (wymagania dotyczące dynamicznych cech układu)**

$$\alpha^* = \frac{\zeta}{\tau} \quad \text{oraz} \quad \beta^* = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}.$$

Przy czym:

- *współczynnik tłumienia*  $\zeta$  obliczamy na podstawie założonego zapasu stabilności

$$\zeta = \frac{\text{tg}\Delta_p \sqrt{\cos\Delta_p}}{2},$$

- parametr  $\tau$  skali czasu wyznaczamy w oparciu o **przybliżony wzór**

$$\tau \cong \frac{T_{s5\%}\zeta}{3},$$

bądź też stosując **dokładną zależność**

$$\tau(\zeta) = \frac{T_{s5\%}}{\bar{T}_{s5\%}(\zeta)},$$

w której

$\bar{T}_{s5\%}(\zeta)$  oznacza *unormowaną wartość czasu ustalania odpowiedzi skokowej członu dynamicznego drugiego rzędu, zależną od współczynnika tłumienia  $\zeta$  i obliczoną na drodze numerycznej (symulacyjnej).*

- Zgodnie z narzuconymi wymaganiami mamy:

$$\zeta = 0.5408,$$

czemu odpowiada *unormowany czas ustalania*

$$\bar{T}_{s5\%} = 5.296.$$

Na tej podstawie wyznaczamy

$$\tau = 0.56647 \text{ s},$$

a następnie

$$\alpha^* = 0.954697 \quad \text{oraz} \quad \beta^* = 1.484909.$$

- Wartość nastawy  $k_i$  sterownika **PID** wynika z zakładanej **dokładności sterowania (wymaganie dotyczące statycznych cech układu).**

**Przyspieszeniowe wzmocnienie** projektowanego układu sterowania dane jest wzorem

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 G_c(s) G_p(s),$$

↓

$$k_a = \frac{k_i \cdot 21}{1.4 \cdot 3.2 \cdot 4.8} = 0.03.$$

Na tej podstawie otrzymujemy

$$k_i = 0.03072s^{-1}.$$

- Przyjętemu biegunowi  $s^*$  odpowiadają wartości:

$$|s^*| = 1.76533 \quad \text{oraz} \quad \arg s^* = \varphi^* = 122.742^\circ,$$

⇓

$$|G_p(s^*)| = 0.69155 \quad \text{oraz} \quad \arg G_p(s^*) = \vartheta = -250.635^\circ.$$

- Powyższe dane pozwalają na wyznaczenie nastaw  $k_p$  i  $k_d$  sterownika *PID*:

$$k_p = \frac{-2k_i}{|s^*|} \cos \varphi^* - \frac{\sin(\varphi^* + \vartheta)}{|G_p(s^*)| \sin \varphi^*} = 1.37554,$$

$$k_d = \frac{k_i}{|s^*|^2} + \frac{\sin \vartheta}{|s^*| |G_p(s^*)| \sin \varphi^*} = 0.92862 \text{ s}.$$

- **Analiza własności układu sterowania - dostrajanie sterownika.**

Warto podkreślić, iż założonemu *współczynnikowi tłumienia*  $\zeta = 0.5408$  przyporządkować można *przeregulowanie*  $\kappa_{\%} = 13.27\%$  *odpowiedzi skokowej wzorcowego członu drugiego rzędu*.

Na drodze komputerowej symulacji (*zrób to sam!*)<sub>χ</sub> uzyskano następujące oszacowania *wskaźników odpowiedzi skokowej wstępnie zaprojektowanego układu sterowania*:

- **czas ustalania**  $T_{s5\%} = 3.33 \text{ s}$  (większy od wymaganej wartości),
- **przeregulowanie**  $\kappa_{\%} = 15.18\%$  (większe od oczekiwań)<sub>χ</sub>

**Zapas fazy** tego wynosi  $\Delta_p = 53.57^\circ$  (mniejszy od zakładanej wartości).

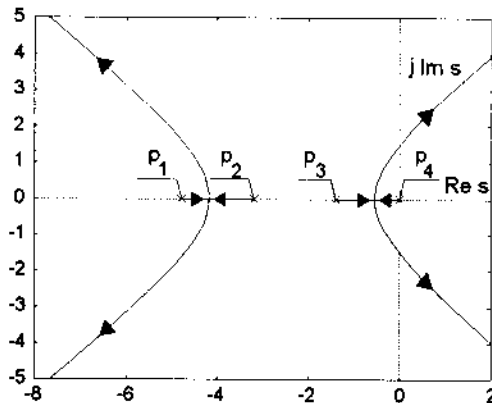
- Zauważamy, iż **skokowa odpowiedź układu zamkniętego jest nieco wolniejsza w stosunku do wymagań**.

Fakt ten można tłumaczyć przybliżonym charakterem opisanej metody projektowania:

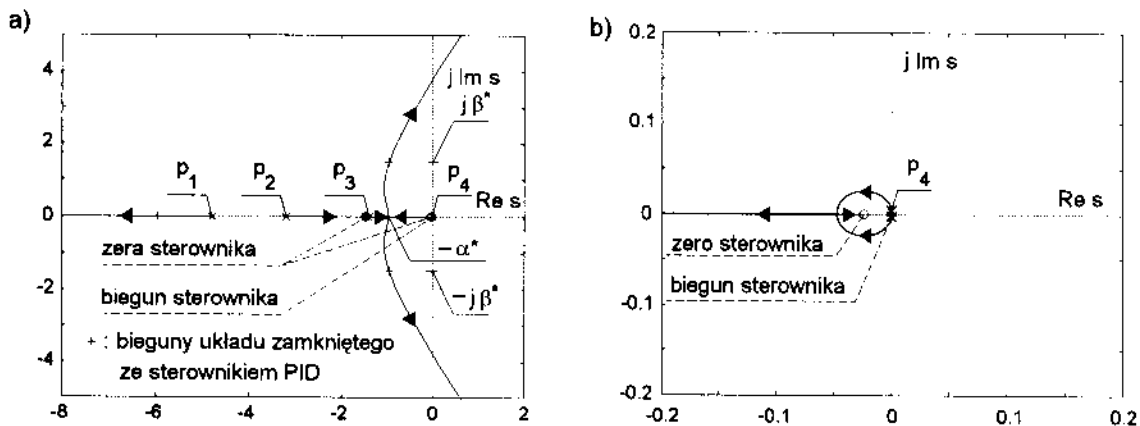
na własności dynamiczne układu sterowania wpływają przecież także **zera** oraz **niedominujące bieguny operatorowej transmitancji tego układu**.

Przeanalizujmy obraz linii pierwiastkowych rozważanego układu sterowania:

- linie pierwiastkowe odpowiadające sterowanemu obiektowi (rys. 6.16),
- linie pierwiastkowe układu złożonego z obiektu oraz sterownika *PID* (rys. 6.17a) (transmitancja układu otwartego posiada dwa bieguny w zerze, na rys. 6.17b szczegółowo pokazano odpowiedni fragment przebiegu linii pierwiastkowych).



Rys. 6.16. Obraz linii pierwiastkowych układu sterowania: układ bez sterownika.



Rys. 6.17a,b. Obraz linii pierwiastkowych układu sterowania: układ ze sterownikiem *PID*.

- Obserwując przebieg linii pierwiastkowych w otoczeniu początku układu współrzędnych (rys. 6.17b), zauważamy, iż w omawianym przypadku układu o astatyzmie drugiego stopnia (transmitancja otwartego układu posiada podwójny biegun w zerze),

spodziewać się można występowania wolno zanikających procesów przejściowych, ujawniających się w stanie bliskim stanowi ustalonym ('zjawisko przeciagania').

Temu niekorzystnemu fenomenowi można - do pewnego stopnia - przeciwdziałać, odsuwając zero sterownika (o mniejszym module) od początku układu współrzędnych.

- Spróbujmy *dostroić wartości nastaw sterownika PID*, w taki sposób, aby *przyspieszyć procesy przejściowe*, występujące w rozważanym układzie sterowania.

- Najprostsze rozwiązanie polega na **zwiększeniu wartości nastawy  $k_p$**  :

działanie sterownika będzie **bardziej agresywne**,  
co powinno spowodować pewne przyspieszenie skokowej odpowiedzi;  
należy jednak spodziewać się także niekorzystnych ubocznych skutków:

- *zwiększenia przeregulowania odpowiedzi skokowej* (i tak już za dużego),
- *spadku zapasu fazy* (zapas ten już jest zbyt mały).

(*Proszę wykonać stosowne symulacyjne badania*).

- Inne rozwiązanie polega na powtórzeniu obliczeń dla  
"nieco" **mniejszej** niż poprzednio wartości *parametru  $\tau$  skali czasu*  
(przy zachowaniu *wartości współczynnika tłumienia  $\zeta$* ).

Założmy przykładowo

$$\tau = 0.5 \text{ s},$$

czemu odpowiadają następujące wartości:

$$\alpha^* = 1.0816, \beta^* = 1.682, |s^*| = 2, \arg s^* = \varphi^* = 122.742^\circ,$$

$$|G_p(s^*)| = 0.55547 \quad \text{oraz} \quad \arg G_p(s^*) = \vartheta = -264.816^\circ.$$

Wyznaczone na tej podstawie *skorygowane nastawy sterownika PID* wynoszą:

$$k_p = 1.33215, \quad k_i = 0.03072 \text{ s}^{-1} \quad \text{oraz} \quad k_d = 1.07347 \text{ s}.$$

*Odpowiedź skokowa układu sterowania* charakteryzuje się:

- **czasem ustalania**  $T_{s5\%} = 2.91 \text{ s}$  (mniejszy od wymaganej wartości),
- **przeregulowaniem**  $\kappa_{\%} = 11.23\%$  (lepsze od oczekiwań).

**Zapas fazy** tego układu wynosi  $\Delta_p = 57.44^\circ$  (większy od założonego).

- Porównując powyższe wartości nastaw sterownika *PID* z nastawami wstępnie proponowanymi, stwierdzamy, iż pożądaný efekt **przyspieszenia procesów przejściowych** (wszelako bez naruszania wymaganego zapasu stabilności!), uzyskano poprzez **zwiększenie roli działania różniczkującego**.

- Należy w tym miejscu lojalnie (realistycznie) zwrócić uwagę na **dwa praktyczne aspekty** strojenia sterownika **PID**:
  - **intensywne działanie różniczkujące** sterownika może być **niewskazane** w sytuacji, w której występują **szumowe** (zwłaszcza szerokopasmowe) **zakłócenia w torze pomiarowym** układu sterowania;
  - istotnym ograniczeniem procedury doboru **nastawy toru różniczkującego** sterownika **PID** jest dopuszczalna w projektowanym układzie **maksymalna wartość sygnału sterującego obiektem** (a często także i **maksymalna dopuszczalna szybkość zmian sygnału sterującego**).

Przedstawiony przykład **nastawiania sterownika PID** to oczywiście tylko ilustracja **wstępnego etapu** projektowania układu sterowania:

założono bowiem **idealną postać transmitancji sterownika**, w której występuje nierealizowalny człon 'czystego' różniczkowania  $k_d s$ .

Model **realizowalnego członu różniczkującego** ma postać

$$\frac{k_d s}{1 + T_D s} = \frac{1}{T_D} \cdot \frac{k_d s}{1/T_D + s}, \quad T_D > 0,$$

zaś stała czasowa  $T_D$ , o możliwie małej wartości, dobierana jest w ten sposób, aby

- spełnić **wymagania na dopuszczalną początkową wartość sygnału sterującego** (wyjście sterownika) dla prototypowej skokowej wielkości zadającej,
- ograniczyć **uboczne skutki wprowadzenia dodatkowego bieguna**  $-1/T_D$  do transmitancji otwartego układu sterowania (spowolnienie procesów przejściowych, obniżenie zapasu stabilności).

Rozważając transmitancję

$$G_{ru}(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)},$$

otrzymujemy następującą formułę na **początkową wartość**  $u(0)$  sterowania  $u(t)$  przy **skokowym sygnale zadającym**

$$u(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} s G_{ru}(s) R(s) = k_p + \frac{k_d}{T_D}.$$

Wynika stąd, iż żądając spełnienia warunku

$$u(0) \leq u_{0\max},$$

gdzie  $u_{0\max} > k_p$  oznacza maksymalną dopuszczalną wartość sygnału sterowania, jako oszacowanie stałej czasowej  $T_D$  toru różniczkowania należy przyjąć

$$T_D \geq \frac{k_d}{u_{0\max} - k_p}.$$

Uzupełniając powyższe wywody, założmy przykładowe ograniczenie  $u_{0\max} = 20$ . Niech ponadto

$$T_D = \frac{k_d}{u_{0\max} - k_p} = 0.05750 \text{ s}.$$

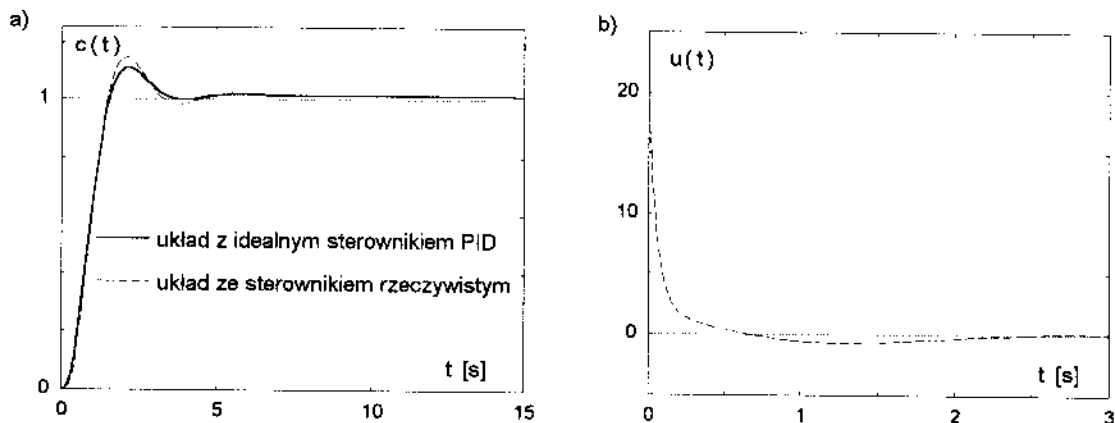
**Odpowiedź skokowa układu sterowania z tak 'urealnionym' sterownikiem PID** charakteryzuje się:

- czasem ustalania  $T_{s5\%} = 2.87 \text{ s}$  (nieco mniejszy w stosunku do układu z idealnym sterownikiem PID),
- przeregulowaniem  $\kappa\% = 14.71\%$  (większe niż poprzednio).

Zapas fazy tego układu wynosi  $\Delta_p = 54.25^\circ$  (mniejszy niż poprzednio).

**Odpowiedzi skokowe** obu rozważanych układów pokazano na rys. 6.18a. Jak widzimy w obu przypadkach obserwuje się zjawisko 'przeciągania'.

**Sygnal sterujący**, występujący w układzie z 'rzeczywistym' sterownikiem PID, pokazano na rys. 6.18b.



Rys. 6.18. Ilustracja własności układu sterowania ze sterownikiem PID: a) odpowiedzi skokowe, b) sygnał sterujący w układzie z rzeczywistym sterownikiem PID.

## WNIOSKI:

- Zauważmy, iż rozważono tu **uproszczoną procedurę strojenia 'rzeczywistego' sterownika  $PID$** , w której **uprzednio zaprojektowany sterownik o idealnej transmitancji 'uzupełniono' o człon inercyjny w torze różniczkowania**.
- Przyjęto przy tym **arbitralne założenie co do początkowej wartości sygnału sterującego**.

Obserwując przebieg tego sygnału (rys. 6.18b) oraz przebieg odpowiedzi skokowej (rys. 6.18a), stwierdzamy, iż sygnały te wydają się wzajemnie **'niedopasowane'**: oto sterownik, będąc nadmiernie agresywnym w początkowej fazie procesu sterowania, zbyt wcześnie kończy swoją aktywność (procesy przejściowe jeszcze trwają).

*Coż czynić w takiej sytuacji?*

Można (zapewne)

**przyjąć silniejsze ograniczenie na początkową wartość sygnału sterującego, zmuszając sterownik do wydłużenia czasu efektywnej aktywności.**

Powyższy efekt osiągamy poprzez **zwiększenie wartości stałej czasowej  $T_D$** .

Pamiętajmy jednak, że **zwiększanie tej stałej czasowej prowadzi do obniżenia zapasu stabilności projektowanego układu, a tym samym zwiększania przeregulowania odpowiedzi skokowej (w stosunku do wartości uprzednio uzyskanych w układzie z idealnym sterownikiem  $PID$ ).**

### **Zadanie:**

Stosując metodę linii pierwiastkowych, przeanalizuj wpływ bieguna  $-1/T_D$ , który jest wprowadzany do transmitancji otwartego układu sterowania w wyniku zastosowania rzeczywistego sterownika  $PID$ .

Rzetelny projekt sterownika  $PID$  nie jest zatem *zadaniem trywialnym*:

już na **wstępnym etapie nastawiania idealnego sterownika  $PID$**

**należy myśleć o**

**implementacyjnych ograniczeniach, którym podlega rzeczywisty sterownik.**

**Zachęcam do podjęcia owego wyzwania.**

## PRZYKŁAD 5 (STEROWNIK PD)

- Transmittancja sterowanego obiektu

$$G_p(s) = \frac{12}{s(3.2 + s)(7.5 + s)}$$

- Określ parametry  $k$  oraz  $z$  sterownika proporcjonalno-różniczkujących PD

idealnego (nierealizowalnego):  $G_{PDi}(s) = k \cdot (z + s), z \geq 0,$

rzeczywistego (realizowalnego):  $G_{PDr}(s) = k_r \cdot \frac{z_r + s}{10z_r + s}, z_r \geq 0,$

zapewniające transmittancji zamkniętego układu sterowania z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym parę dominujących biegunów:

$$s_{1,2}^* = -2 \pm j2.$$

Bieguny te, jak łatwo sprawdzić, wynikają z poniższych specyfikacji dotyczących skokowej odpowiedzi tego układu, żąda się bowiem:

*przeregulowania*  $\kappa\% \cong 5\%$  oraz *czasu ustalania*  $T_{s2\%} \cong 2s$ .

- Realizowalność transmittancji sterownika (korektora) uzyskano poprzez wprowadzenie do nierealizowalnej transmittancji  $G_{PDi}(s)$  dodatkowego bieguna  $-10z_r$ .

Zadbano jednak o to, aby w tak skorygowanej transmittancji sterownika 'dominującą rolę nadal odgrywało zero  $-z_r$ '.

Osiągnięto to, zachowując 'dekadowy' odstęp między owym 'aktywnym' zerem a 'implementacyjnie niezbędnym' biegunem.

Taki biegun musi oczywiście leżeć na lewo od 'aktywnego' zera - co oznacza tak zwane 'forsowanie' fazy układu otwartego.

Zauważmy, iż taki sposób projektowania rzeczywistego sterownika PD zachowuje prostotę projektu sterownika idealnego:

w obu przypadkach musimy 'nastawić' dwa parametry.

### Rozwiązanie

- **Sterownik idealny:**

Transmitancja *otwartego układu sterowania*:

$$G_{PDi}(s)G_p(s) = k \cdot G_0(s) = k \cdot \frac{12(z+s)}{s(3.2+s)(7.5+s)}$$

Z dwóch biegunów dominujących rozważmy  $s^* = -2 + j2$ .

#### Z fazowego warunku

$$\arg G_0(s^*) = r \cdot 180^\circ, \quad r = \pm 1, \pm 3, \dots,$$

otrzymujemy równanie (por. rys. 6.19)

$$\vartheta_z - \vartheta_{p_1} - \vartheta_{p_2} - \vartheta_{p_3} = -180^\circ,$$

w którym

$$\begin{aligned} \vartheta_z &= \arctg \frac{2}{z-2} && \text{- przyczynek fazowy zależny od } z, \\ \vartheta_{p_1} &= \arctg \frac{2}{5.5} = 19.98^\circ && \text{- przyczynek od bieguna } p_1 = -7.5, \\ \vartheta_{p_2} &= \arctg \frac{2}{1.2} = 59.04^\circ && \text{- przyczynek od bieguna } p_2 = -3.2, \\ \vartheta_{p_3} &= 180^\circ - \arctg \frac{2}{2} = 135^\circ && \text{- przyczynek od bieguna } p_3 = 0. \end{aligned}$$

Mamy przeto

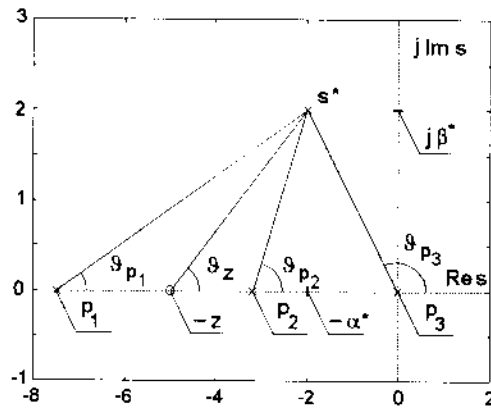
$$\vartheta_z = 34.02^\circ \quad \Rightarrow \quad z = 4.9629.$$

Wartość parametru  $k$  rozważanego sterownika oblicza się z **amplitudowego warunku**

$$|k \cdot G_0(s^*)| = 1.$$

Na tej podstawie otrzymujemy

$$k = \frac{1}{|G_0(s^*)|} \approx 0.900.$$



Rys. 6.19. Przyczynki fazowe odpowiadające transmitancji układu otwartego.

• **Sterownik rzeczywisty:**

W bilansie przyczynków fazowych uwzględnić należy

**ujemne przesunięcie fazowe  $-\vartheta_p$  wprowadzane przez odległy biegun  $s = -10z_r$ :**

$$\vartheta_z - \vartheta_{p_1} - \vartheta_{p_2} - \vartheta_{p_3} - \vartheta_p = -180^\circ,$$

gdzie

$$\vartheta_p = \arctg \frac{2}{10z_r - 2}$$

Transmitancja sterownika  $G_{pDr}(s)$  powinna dla  $s = s^*$  wnosić do bilansu przyczynków fazowych  **dodatni przyczynek o wartości  $34.02^\circ$** . Zatem musi zachodzić:

$$\arctg \frac{2}{z_r - 2} - \arctg \frac{2}{10z_r - 2} = 34.02^\circ,$$

co prowadzi do **kwadratowego równania na niewiadomą  $z_r$**

$$6.750165z_r^2 - 32.85036z_r + 5.400132 = 0,$$

⇓

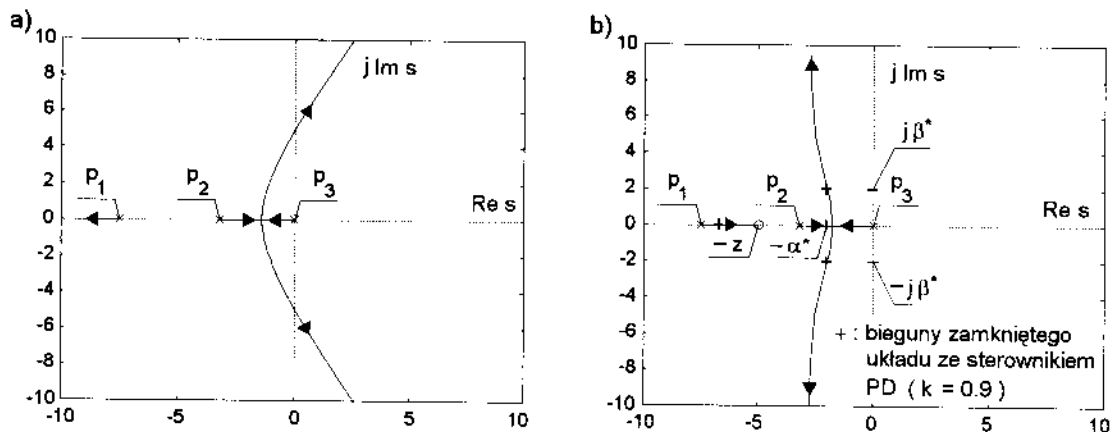
$$z_r = 4.6963.$$

Wartość parametru  $k_r$  sterownika wynika z **amplitudowego warunku**

$$k_r = \frac{1}{\left| \frac{z_r + s}{10z_r + s} \cdot G_p(s) \right|_{s=s^*}} \cong 43.1336.$$

- **Ocena układu sterowania:**

- linie pierwiastkowe odpowiadające sterowanemu obiektowi (rys. 6.20a),
- linie pierwiastkowe układu złożonego z obiektu oraz sterownika *PD* (rys. 6.20b).



Rys. 6.20. Obraz linii pierwiastkowych układu sterowania:  
a) układ bez sterownika, b) układ ze sterownikiem *PD* (sterownik idealny).

Wskaźniki odpowiedzi skokowych rozważanych układów sterowania:

- układ z idealnym sterownikiem *PD*:  $\kappa\% = 4.95\%$  oraz  $T_{s2\%} = 2.06\text{ s}$ ,
- układ z rzeczywistym sterownikiem *PD*:  $\kappa\% = 5.05\%$  oraz  $T_{s2\%} = 2.08\text{ s}$ .

**KOMENTARZ:**

- Rozważmy zastosowanie sterownika proporcjonalnego.

**Sterownik proporcjonalny, który zapewnia przeregulowanie odpowiedzi skokowej na żądanym poziomie, ma postać**

$$G_c(s) = 2.2037.$$

Wzmocnienie tego sterownika dobrano, za pomocą metody linii pierwiastkowych (MATLAB!), przyjmując następującą wartość współczynnika tłumienia pary dominujących biegunów transmitancji zamkniętego układu sterowania

$$\zeta = \frac{|\ln \kappa|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \kappa}} \approx 0.7.$$

Wskaźniki odpowiedzi skokowej układu sterowania z takim sterownikiem:

$$\kappa\% = 4.21\% \quad \text{oraz} \quad T_{s2\%} = 3.44\text{ s}.$$

**Sterownik *PD*, użyty w rozważanym układzie, pozwala zatem na przyspieszenie procesów przejściowych, przy zachowaniu założonego zapasu stabilności.**

- Zbadajmy postać sterującego sygnału  $u(t)$ . Odpowiednia transmitancja ma postać

$$G_{ru}(s) = \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

Dla układu z realizowalnym sterownikiem *PD* otrzymujemy następujące oszacowanie początkowej wartości  $u(0)$  sterowania przy skokowym sygnale zadającym

$$u(0) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG_{ru}(s)R(s) = k_r$$

W rozważanym przypadku mamy  $u(0) = 43.1336$ .

- Inny prosty sposób strojenia sterownika *PD* przypomina działania, jakie podejmowano w poprzednim przykładzie w celu **nastawienia realizowalnego sterownika *PID***:

**po wyznaczeniu parametrów  $k$  oraz  $z$  idealnego sterownika o transmitancji  $G_{PDi}(s) = k \cdot (z + s)$ , stałą czasową  $T_D > 0$  sterownika o realizowalnej transmitancji**

$$G_{PDr}(s) = k \cdot \frac{(z + s)}{1 + T_D s}$$

**dobiera się w ten sposób, aby spełniony był warunek**

$$u(0) = \frac{k}{T_D} \leq u_{0\max}$$

gdzie  $u_{0\max}$  oznacza **maksymalną dopuszczalną wartość sygnału sterowania.**

Przykładowo, przyjmując

$$u_{0\max} = 43.1336 \quad \text{oraz} \quad T_D = \frac{k}{u_{0\max}} = 0.02087$$

uzyskujemy układ sterowania, którego odpowiedź skokowa charakteryzuje się następującymi wskaźnikami:

$$\kappa_{\%} = 6.23\% \quad \text{oraz} \quad T_{s2\%} = 2.09 \text{ s.}$$

Jak widać, w większym niż poprzednio stopniu naruszono zadane specyfikacje.

O ile - z praktycznych względów miałyby to znaczenie - **można w tym przypadku przeprojektować sterownik, biorąc jako punkt wyjścia zmodyfikowaną parę dominujących biegunów 'nieco' przesuniętą w głąb lewej półpłaszczyzny.**

## PRZYKŁAD 6 (SYNTEZA STEROWNIKA *LEAD-LAG*)

- Obiekt o operatorowej transmitancji danej wzorem

$$G_p(s) = \frac{40}{s(1+6s)(1+0.3s)^2(1+0.08s)}$$

sterowany jest za pomocą *sterownika przyspieszająco-opóźniającego fazę lead-lag* w układzie zamkniętym z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym.

- Wyznacz parametry transmitancji tego sterownika, przy których:
  - *odpowiedź skokowa* układu zamkniętego charakteryzuje się *przeregulowaniem*  $\kappa \leq 0.2$  oraz *czasem ustalania*  $T_{s2\%} \leq 8.0$  s,
  - *błąd śledzenia jednostkowego sygnału prędkościowego* w stanie ustalonym nie przekracza  $e_v(\infty) \leq 0.1$ ,
  - *początkowa wartość sygnału sterującego* przy jednostkowym skokowym sygnale zadającym oraz przy zerowych warunkach początkowych wynosi  $u(0) \leq 0.3$ .

### Rozwiązanie

- Zadanie rozwiązuje się w **dwóch krokach**:
  - w **pierwszym kroku** wyznacza się parametry sekcji *lead* transmitancji sterownika, biorąc pod uwagę wymagania, dotyczące  
**stabilności układu zamkniętego** oraz  
**szybkości sterowania**  
przy uwzględnieniu **ograniczenia na początkową wartość sygnału sterującego**,
  - w **drugim kroku** wyznacza się parametry sekcji *lag* transmitancji sterownika, w ten sposób, aby zapewnić wymaganą **statyczną dokładność sterowania**.

### UWAGA:

Specyfikacje, dotyczące **statycznej dokładności** układu sterowania, mogą obejmować także **wymagania co do zdolności sterownika** w zakresie **tłumienia wpływu zakłóceń** oddziałujących na ten układ.

- Niech  $(s^*, \bar{s}^*)$  oznacza parę dominujących biegunów transmitancji zamkniętego układu sterowania, złożonego z
  - obiektu  $G_p(s)$  oraz
  - sterownika przyspieszającego fazę *lead* o transmitancji

$$G_c^{lead}(s) = \frac{a_0 + a_1 s}{1 + b_1 s}, \quad b_1 \geq 0.$$

- Biegun

$$s^* = -\alpha^* + j\beta^* = \frac{-\zeta}{\tau} + j \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$$

transmitancji odpowiedniego wzorcowego układu drugiego rzędu obliczamy na podstawie żądanych wartości wskaźników  $\kappa$  oraz  $T_{s2\%}$ :

$$\zeta = \frac{|\ln \kappa|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \kappa}} \quad \text{oraz} \quad \tau \leq \frac{T_{s2\%}}{\bar{T}_{s2\%}(\zeta)}.$$

Zakładając pewną 'strefę bezpieczeństwa'  $\Delta_s = 0.02$

$$\kappa = 0.2 - \Delta_s = 0.2 - 0.02 = 0.18,$$

wyznaczamy

$$\zeta = 0.47911 \quad \text{oraz} \quad \bar{T}_{s2\%} = 8.2287,$$

czemu odpowiada ograniczenie  $\tau \leq 0.972207$  s.

- Dla przykładowej wartości  $\tau = 0.95$  s otrzymujemy:

$$\alpha^* = 0.50433 \quad \text{oraz} \quad \beta^* = 0.92395.$$

- Przy ustalonej wartości *swobodnego parametru*  $a_0$  transmitancji sterownika *lead*, pozostałe parametry tej transmitancji obliczamy na podstawie znanych wzorów:

$$a_1(a_0) = \frac{a_0 |G_p(s^*)| \sin(\varphi^* - \vartheta) + \sin \varphi^*}{|s^*| |G_p(s^*)| \sin \vartheta}, \quad b_1(a_0) = \frac{-a_0 |G_p(s^*)| \sin \varphi^* - \sin(\varphi^* + \vartheta)}{|s^*| \sin \vartheta},$$

gdzie

$$s^* = |s^*| e^{j\varphi^*} \quad \text{oraz} \quad G_p(s^*) = |G_p(s^*)| e^{j\vartheta}.$$

Dla numerycznych danych przykładu mamy:

$$\varphi^* = 118.63^\circ, |G_p(s^*)| = 8.3914 \text{ oraz } \vartheta = -269.28^\circ.$$

- Parametr  $\alpha_0$  wyznaczamy na podstawie **wymagania dotyczącego** początkowej wartości sterowania  $u(0)$ :

$$u(0) = \frac{\alpha_0 |G_p(s^*)| \sin(\varphi^* - \vartheta) + \sin \varphi^*}{|G_p(s^*)| [-\alpha_0 |G_p(s^*)| \sin \varphi^* - \sin(\varphi^* + \vartheta)]} = 0.3$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_0 = 0.015844.$$

Co z kolei prowadzi do

$$\alpha_1 = 0.10643 \quad \text{oraz} \quad b_1 = 0.35475.$$

- W drugim kroku wyznaczamy parametry sekcji **lag** transmitancji sterownika

$$G_c^{lag}(s) = \frac{-z+s}{-p+s}, \quad z < p < 0.$$

**Współczynnik prędkościowego wzmocnienia** układu ze sterownikiem **lead** o parametrach określonych w pierwszym kroku wynosi

$$k_v^{lead} = \lim_{s \rightarrow 0} s G_c^{lead}(s) G_p(s) = 40 \alpha_0 = 0.63376 s^{-1}.$$

**Żądana wartość współczynnika prędkościowego wzmocnienia**  $k_v$  układu ze sterownikiem **lead-lag** wynika z wymagania odnośnie **dokładności sterowania**:

$$k_v = \frac{1}{e_v(\infty)} = 10 s^{-1}.$$

Parametr  $\beta = z/p$  sekcji **lag** tego sterownika dany jest wzorem

$$\beta = \frac{k_v}{k_v^{lead}} = 15.77884.$$

**Biegun  $p$  sekcji lag** przyjmujemy w ten sposób, aby spełniony był warunek

$$p \geq \frac{(\alpha^*)^2 + (\beta^*)^2}{(\beta - 1)\beta^*} \cdot \operatorname{tg} \delta_p.$$

Przykładowej wartości kąta  $\delta_p = -0.5^\circ$  (stopień swobody) odpowiadają:

$$p = -7.08144E-4 \quad \text{oraz} \quad z = \beta p = 1.11737E-2.$$

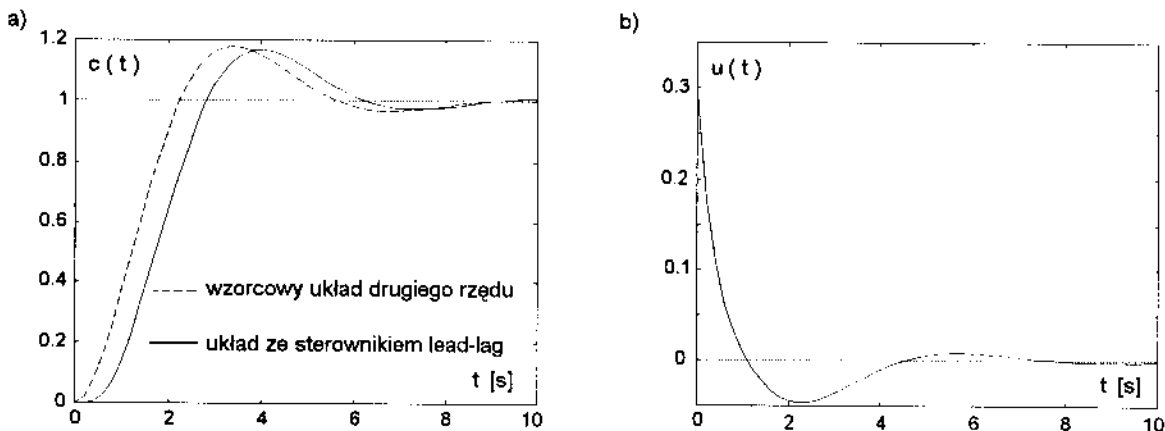
- Transmitancja sterownika typu *lead-lag* przyjmuje przeto postać:

$$G_c^{lead-lag}(s) = G_c^{lead}(s)G_c^{lag}(s) = 0.3 \cdot \frac{(0.14888 + s)(1.11737E-2 + s)}{(2.8189 + s)(7.08144E-4 + s)}$$

- Symulacyjna weryfikacja układu sterowania (rys. 6.21).

Zamknięty układ sterowania charakteryzuje się wskaźnikami:

$$\kappa = 0.16685, \quad T_{s2\%} = 8.028 \text{ s}, \quad e_v(\infty) = 0.1 \quad \text{oraz} \quad u(0) = 0.3.$$



Rys. 6.21. Ilustracja własności układu sterowania ze sterownikiem *lead-lag*:  
a) odpowiedź skokowa, b) sygnał sterujący.

## KOMENTARZ:

- (1) Przyjmując *odpowiednio małą* wartość parametru  $|\delta_p|$ , udało się *ograniczyć niektóre niekorzystne uboczne skutki zastosowania sekcji lag*.

*Wolno zanikający mod skokowej odpowiedzi* rozważanego układu sterowania, pojawiający się w wyniku wprowadzenia do transmitancji układu otwartego pary *zero-biegun*, leżącej w *pobliżu początku układu współrzędnych*, *nie ma w tym przypadku istotnego wpływu na czas ustalania*  $T_{s2\%}$ .

Jak łatwo bowiem pokazać, *oszacowanie współczynnika udziału*  $\tilde{h}_\sigma$  owego wolnego modu  $\exp(\sigma t)|_{\sigma=-1.13642E-2}$  ma wartość *mniejszą od założonej szerokości kontrolnej strefy oceny stanu ustalonego*:

$$\tilde{h}_\sigma = \frac{\sigma - z}{z} \Big|_{\sigma = -1.13642E-2} = 0.017049 < 0.02.$$

(2) Rozważmy inną przykładową wartość  $\delta_p = -1.0^\circ$ .

Po wykonaniu odpowiednich obliczeń otrzymujemy:

$$p = -1.4164E-3 \quad \text{oraz} \quad z = \beta p = -2.23491E-2,$$

a także oszacowanie współczynnika udziału modu  $\exp(\sigma t) \Big|_{\sigma = -2.31385E-2}$  odpowiedzi skokowej układu zamkniętego

$$\tilde{h}_\sigma = \frac{\sigma - z}{z} \Big|_{\sigma = -2.31385E-2} = 0.035322 > 0.02.$$

Czas zaniku najwolniejszego modu wynosi teraz

$$\tilde{T}_{\sigma 2\%} = \sigma^{-1} \cdot \ln \left| \frac{0.02}{\tilde{h}_\sigma} \right| \Big|_{\sigma = -2.31385E-2} = 24.582s$$

i, jak widzimy, *decyduje o czasie ustalania tej odpowiedzi.*

**Wniosek ten potwierdzają wyniki symulacji badanego układu sterowania:**

analizując skokową odpowiedź tego układu, uzyskujemy bowiem  $T_{s2\%} = 23.52s$  (zgodnie z oczekiwaniem, obserwuje się także wzrost przeregulowania  $\kappa = 0.1844$ ).

(3) Przystępując do *bardziej złożonych zadań projektowych*, należy również pamiętać o *innych ubocznych efektach oddziaływania sekcji lag*:

W rozważanym przypadku uwaga ta dotyczy przede wszystkim **czasu ustalania prędkościowej odpowiedzi układu zamkniętego.**

Oszacujmy współczynniki udziału  $\tilde{h}_{v\sigma}$

oraz czasy zaniku  $\tilde{T}_{v\sigma 2\%}$  wyróżnionych modów tej odpowiedzi:

$$\delta_p = -0.5^\circ : \quad \tilde{h}_{v\sigma} = -1.50033 \quad \text{oraz} \quad \tilde{T}_{v\sigma 2\%} = 582.56s (!),$$

$$\delta_p = -1.0^\circ : \quad \tilde{h}_{v\sigma} = -1.52656 \quad \text{oraz} \quad \tilde{T}_{v\sigma 2\%} = 286.87s.$$

**Symulacyjne badania** potwierdzają powyższe niewesołe rokowania:

$$\delta_p = -0.5^\circ : \quad T_{vs2\%} = 584.19s,$$

$$\delta_p = -1.0^\circ : \quad T_{vs2\%} = 288.53s.$$