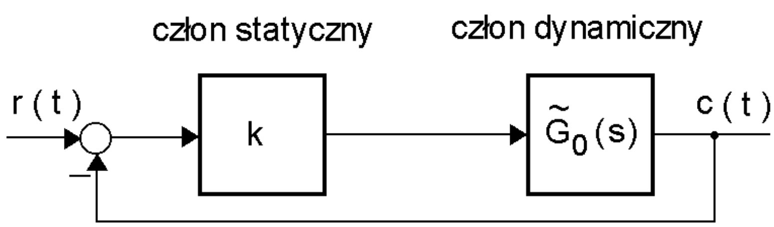
PRZYKŁAD 1
LINIE PIERWIASTKOWE

- Transmitancja otwartego układu sterowania z rys. 1 dana jest wzorem

$$k\cdot\tilde{G}_0(s) = k\cdot\frac{N(s)}{D(s)} = k\cdot\frac{1}{s(2+s)^3}, \quad k \geq 0.$$



Rysunek 1: Podstawowy schemat strukturalny układu sterowania.

- Wyznacz przebieg linii pierwiastkowych układu zamkniętego.
- Przy jakiej wartości wmocnienia k układ ten osiąga '**granicę stabilności**'?
- Dla jakiego wzmocnienia k transmitancja układu zamkniętego charakteryzuje się **podwójnym biegunem** $s = -0.5$?

- Transmitancja układu otwartego nie posiadając skończonych zer ($m = 0$) ma cztery ($n = 4$) bieguny: $p_1 = 0$ oraz $p_2 = p_3 = p_4 = -2$.
- Linie pierwiastkowe dążą zatem ku **czterem asymptotom** o kątach $\pm 45°$ i $\pm 135°$.
- Początkowy punkt owych asymptot

$$\sigma_\alpha = (3 \cdot (-2) - 0)/4 = -1.5.$$

- Ten fragment linii pierwiastkowych, w którym przebiegają one wzdłuż osi rzeczywistej, zajmuje odcinek [-2, 1]. Możemy oczekiwać dwóch **punktów odejścia** linii pierwiastkowych od tej osi.
- Punkty odejścia wyznaczamy, rozwiązując równanie

$$N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = 0$$

przy czym:

$$N(s) = 1 \quad \text{oraz} \quad D(s) = s(2+s)^3.$$

- Rozważane równanie ma postać

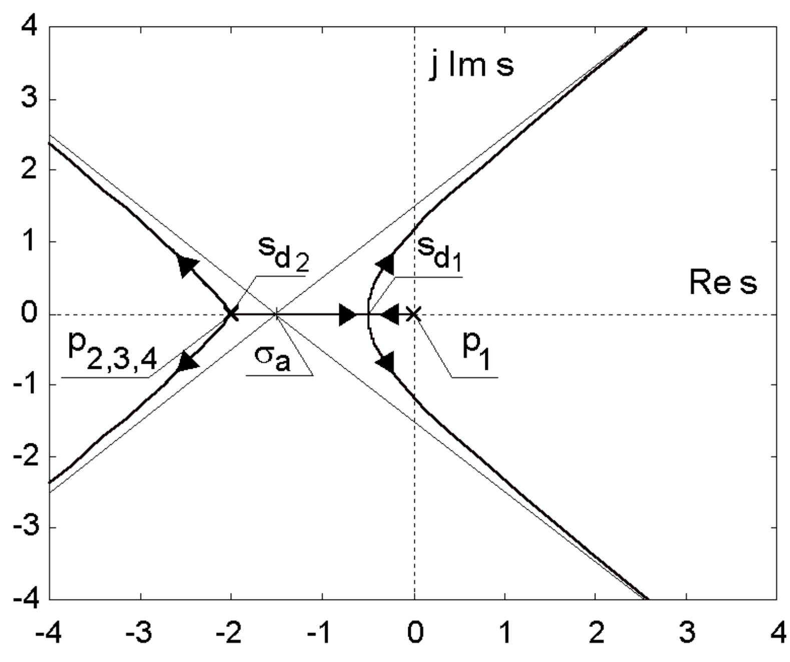
$$(2+s)^2(1+2s) = 0.$$

Stąd otrzymujemy punkty odejścia:

$$s_{d_1} = -0.5 \quad \text{oraz} \quad s_{d_2} = -2.$$

Jak łatwo zauważyć (por. rys. 2)

$$s_{d_2} = p_{2,3,4}.$$



Rysunek 2: Przykład 1: linie pierwiastkowe.

- Krytyczną wartość wzmocnienia $\bar{k}$, przy której układ zamknięty znajduje się na **'granicy stabilności'**, wyznaczymy na podstawie równania charakterystycznego tego układu:

$$k+s(2+s)^3 = k+8s+12s^2+6s^3+s^4 = 0.$$

- Analizując pierwszą kolumnę stosownej tablicy Routha skojarzonej z tym równaniem

$$\begin{array}{c|ccc} s^4 & 1 & 12 & k \\ s^3 & 6 & 8 & \\ s^2 & 10.6667 & k & \\ s^1 & 8-0.5625k & & \\ s^0 & k & & \end{array}$$

stwierdzamy, iż układ zamknięty jest stabilny przy

$$0 < k < \bar{k} = 14.222.$$

- Pulsację **niettłumionych drgań** ω_n dla krytycznej wartości $\bar{k} = 14.222$ obliczamy w oparciu o **pomocnicze równanie**, uzyskane z badanej tablicy Routha:

$$\bar{k}s^2 + 10.10.6667 = 0.$$

Na tej podstawie, otrzymujemy

$$\omega_n = 2/\sqrt{3}\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}.$$

- Wzmocnienie, przy którym transmitancja układu zamkniętego posiada podwójny rzeczywisty biegun

$$s = s_{d_1} = -0.5$$

obliczamy ze wzoru (warunku amplitudowego)

$$k = \left.\frac{1}{\tilde{G}_0(s)}\right|_{s=-0.5} = 1.6875.$$

PRZYKŁAD 2

LINIE PIERWIASTKOWE

- Transmitancja otwartego układu sterowania (rys. 1) dana jest wzorem

  $$k\cdot\tilde{G}_0(s) = k\cdot\frac{N(s)}{D(s)} = k\cdot\frac{0.5+s}{s(-1+s)(9+3s+s^2)}.$$

  Jest więc to układ **niestabilny** w stanie otwartym.

- Wyznaczając linie pierwiastkowe układu zamkniętego, zbadaj możliwość **ustabilizowania** tego układu poprzez odpowiedni dobór wartości parametru $k \geq 0$.

- Stosując rutynową procedurę, stwierdzamy, że:

  ⋆ Mamy cztery bieguny transmitancji układu otwartego:

  $$p_{1,2} = -1.5 \pm j2.59808, \quad p_3 = 0, \quad p_4 = 1.$$

- $\star$ Występuje pojedyncze skończone zero tej transmitancji: $z_1 = -0.5$.
- $\star$ Mamy trzy asymptoty o kątach $\pm 60^\circ$ oraz 180° z początkiem (centroidem) w punkcie $\sigma_a = -0.5$.
- $\star$ Linie pierwiastkowe zajmują na osi rzeczywistej obszar $(-\infty, z_1] \cup [p_3, p_4]$, czyli

$$(-\infty, -0.5] \cup [0, 1].$$

- $\star$ Obraz linii pierwiastkowych składa się z **czterech gałęzi**. Oczekujemy zatem: jednego odejścia od osi rzeczywistej i jednego pojawienia się na tej osi.
- $\star$ Równanie $N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = 0$, które przyjmuje teraz postać

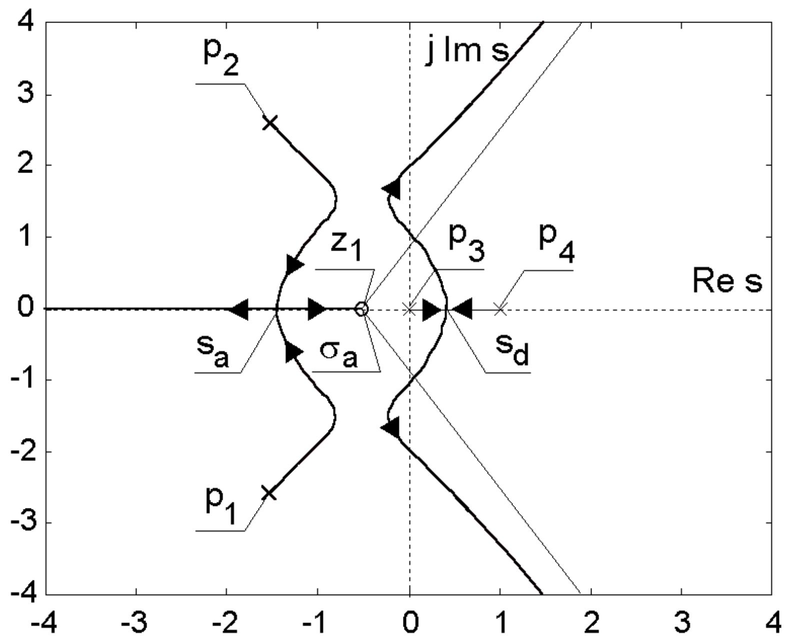
$$-1.5 + 2s + 3s^2 + 2s^3 + s^4 = 0$$

posiada cztery pierwiastki:

$$s_1 = -1.41167, \quad s_{2,3} = -0.5 \pm j1.52681$$
$$s_4 = 0.41167.$$

⋆ Wynika stąd, że:
punkt pojawienia się $s_a = s_1$, zaś **punkt odejścia** $s_d = s_4$.

⋆ Wyznaczmy **kąt odejścia** linii pierwiastkowej od bieguna zespolonego p_2 (rys. 3).



Rysunek 3: Przykład 2: linie pierwiastkowe.

Mamy następujące kątowe przyczynki:

$$\vartheta_{p_1} = 90^\circ$$

$\vartheta_{p_3} = 180^\circ - \arctan(2.598/1.5) = 120^\circ$
$\vartheta_{p_4} = 180^\circ - \arctan(2.598/2.5) = 133.9^\circ$
$\vartheta_{z_1} = 180^\circ - \arctan 2.598 = 111.05^\circ.$

Zatem **kąt odejścia** linii pierwiastkowej od bieguna $p_2 = -1.5 + j2.59808$ wynosi

$$\vartheta_{p_2} = \vartheta_{z_1} - \vartheta_{p_1} - \vartheta_{p_3} - \vartheta_{p_4} + 180^\circ = -52.85^\circ.$$

⋆ Równanie charakterystyczne układu zamkniętego

$$0.5k + (k-9)s + 6s^2 + 2s^3 + s^4 = 0.$$

⋆ Przedział wartości k **stabilizujących** ten układ

$$k \in (11.35425, 16.64575)$$

wynika ze stosownej tablicy Routha

$$\begin{array}{c|ccc}
s^4 & 1 & 6 & 0.5k \\
s^3 & 2 & k-9 & \\
s^2 & -0.5k + 10.5 & 0.5k & \\
s^1 & \frac{94.5 - 14k + 0.5k^2}{-10.5 + 0.5k} & & \\
s^0 & 0.5k. & &
\end{array}$$

- $\star$ Z tablicy tej otrzymujemy także **pomocniczy wielomian**

$$P(s) = 0.5k + (-0.5k + 10.5)s^2$$

na podstawie którego łatwo obliczymy punkty przecięcia linii pierwiastkowych z osią urojoną płaszczyzny zespolonej

(układ zamknięty jest wtedy na **'granicy stabilności'**):
$k = 11.35425 \Rightarrow \pm j1.08495$
$k = 16.64575 \Rightarrow \pm j1.95522.$

- $\star$ Transmitancja układu zamkniętego ma podwójne rzeczywiste bieguny $s = s_a$ oraz $s = s_d$ przy wzmocnieniu k równym, odpowiednio:

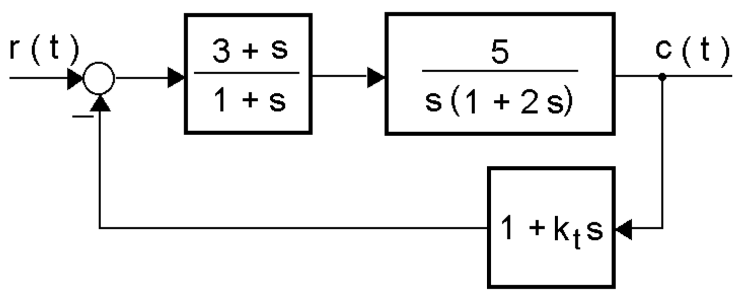
$$k_a = \frac{1}{\tilde{G}_0(s)\Big|_{s=s_a}} = 25.2359$$
$$k_d = \frac{1}{\tilde{G}_0(s)\Big|_{s=s_d}} = 2.7641.$$

PRZYKŁAD 3

LINIE PIERWIASTKOWE:

Przypadek niestandardowy

- Rozważmy **układ sterowania** pokazany na rys. 4.



Rysunek 4: Przykład 3: linie pierwiastkowe.

W układzie tym zastosowano:

– **położeniowe** jednostkowe sprzężenie zwrotne,

– **prędkościowe** sprzężenie zwrotne o dobieranej wartości,

– **szeregową** korekcję w głównym torze sterowania.

- W oparciu o metodę linii pierwiastkowych wyznacz położenie pierwiastków równania charakterystycznego tego układu

  $$W_s(s) = 15+(6+15k_t)s+(3+5k_t)s^2+2s^3 = 0.$$

  w zależności od **współczynnika sprzężenia prędkościowego** $k_t \geq 0$.
- Dla jakich wartości tego współczynnika skokowa odpowiedź rozważanego układu charakteryzuje się czasem ustalania

  $$T_{s5\%} \leq 3\,\mathrm{s}?$$

- Przepiszmy równanie charakterystyczne w postaci afinicznej ze względu na k_t

  $$(15+6s+3s^2+2s^3)+k_t\cdot 5s(3+s) = 0.$$

- Metodę linii pierwiastkowych należy przeto stosować do następującej **pomocniczej** transmitancji

  $$k_t\cdot\tilde{G}_0(s) = k_t\cdot\frac{N(s)}{D(s)} = k_t\cdot\frac{5s(3+s)}{15+6s+3s^2+2s^3}.$$

- Transmitancja $\tilde{G}_0(s)$ posiada trzy bieguny

  $p_1 = -1.94283,\ p_{2,3} = 0.22142 \pm j1.95226$

  a także dwa skończone zera

$$z_1 = -3 \quad \text{oraz} \quad z_2 = 0.$$

- Obszar, w którym linie pierwiastkowe leżą na rzeczywistej osi płaszczyzny zespolonej ma postać sumy

$$[-\infty,\ -3] \cup [-1.94283,\ 0].$$

- W obrazie linii pierwiastkowych, składającym się z trzech gałęzi, dwie z tych gałęzi dążą ku zerom z_1 i z_2, trzecia zaś gałąź dąży wzdłuż osi odciętych do $-\infty$.
- Punkty **pojawienia się** linii pierwiastkowych na osi odciętych wyznaczamy z równania $N(s)D'(s) - N'(s)D(s) = 0$, które przyjmuje tu postać

$$-45 - 30s + 3s^2 + 12s^3 + 2s^4 = 0.$$

Spośród pierwiastków tego równania:

$$s_1 = -5.3410,\ s_{2,3} = -1.22355 \pm j0.92676$$
$$s_4 = 1.7881$$

to s_1 jest poszukiwanym punktem pojawienia się, $s_a = s_1$. Zachodzi bowiem

$$s_1 \in [-\infty,\ -3] \cup [-1.94283,\ 0]$$

- **Kąt odejścia**

$$\vartheta_{d_3} = 162.69^\circ$$

od zespolonego bieguna $p_3 = 0.22142 + j1.95226$ wnika ze wzoru

$$\vartheta_{d_3} = \vartheta_{z_1} + \vartheta_{z_2} - \vartheta_{p_1} - \vartheta_{p_2} + 180^\circ$$

w którym występują kątowe przyczynki:

$$\vartheta_{z_1} = \arctan(1.952/3.221) = 31.21^\circ$$
$$\vartheta_{z_2} = \arctan(1.952/0.221) = 83.53^\circ$$
$$\vartheta_{p_1} = \arctan(1.952/2.164) = 42.05^\circ$$

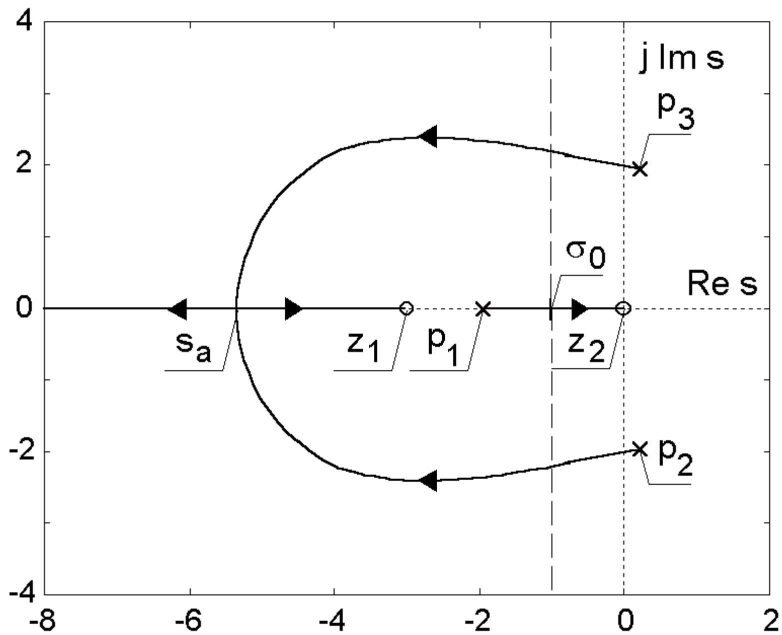
oraz

$$\vartheta_{p_2} = 90^\circ.$$

- Wartości współczynnika k_t, przy których zamknięty układ zachowuje stabilność, wyznaczyć można na podstawie analizy stosownej tablicy Routha. Mamy:

$$k_t > \bar{k}_t = 0.14031.$$

Krytycznej wartości $\bar{k}_t$ odpowiada para urojonych biegunów $\pm j2.01304$ transmitancji układu zamkniętego.



Rysunek 5: Przykład 3: linie pierwiastkowe.

- Załóżmy, że **czas ustalania** $T_{s5\%}$ odpowiedzi skokowej układu zamkniętego oszacować można na podstawie uproszczonej formuły

$$T_{s5\%} \approx -3/\sigma_0$$

w której $\sigma_0 < 0$ jest **częścią rzeczywistą** tego pierwiastka równania charakterystycznego rozważanego układu, który leży najbliżej osi urojonej (**mod** skojarzony z takim pierwiastkiem jest **modem najwolniejszym**).

- Dla $T_{s5\%} = 3\,\mathrm{s}$ otrzymujemy przeto

$$\sigma_0 = -1.$$

Dokonajmy w wielomianie charakterystycznym W_s (s) podstawienia (**afinicznej** transformacji zmiennych)

$$p = s - \sigma_0 = s + 1.$$

- Uzyskujemy w ten sposób wielomian pomocniczej zmiennej p

$$\begin{aligned} W_p(p) &= W_s(s)\big|_{s=p-1} \\ &= 10 - 10k_t + (6+5k_t)p + \\ &\quad (-3+5k_t)p^2 + 2s^3. \end{aligned}$$

- Stosując do wielomianu $W_p(p)$ standardowe kryterium stabilności Routha, otrzymujemy zbiór wymagań na parametr k_t, przy których wszystkie zera tego wielomianu posiadają ujemne części rzeczywiste:

$$k_t > 0.6, \quad k_t < 1$$

oraz

$$(6+5k_t)(-3+5k_t) > 2(10-10k_t)$$
$$\Updownarrow$$
$$(k_t - 0.71774)(k_t + 2.11774) > 0.$$

- Na tej podstawie wnioskujemy, iż dla

$$k_t \in (0.71774, 1)$$

wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego $W_s(s) = 0$ mają części rzeczywiste mniejsze niż $\sigma_0 = -1$.

- Symulacja w niezawodnym MATLABie pokazuje, że dla przykładowo wybranej wartości sprzężenia prędkościowego

$$k_t = 0.9$$

otrzymujemy procesy przejściowe o zadowalającej szybkości

$$T_{s5\%} = 2.31\,\mathrm{s}.$$