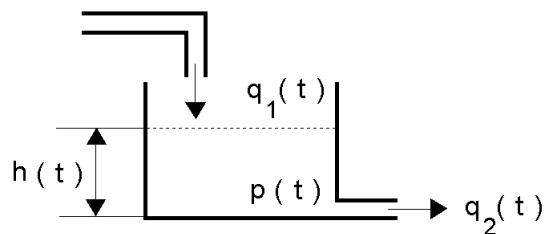


Modelowanie układów dynamicznych

PRZYKŁAD 1 - Zbiornik

- Na rys. 1 pokazany jest schemat **zbiornika przepływowego**.



Rysunek 1: Schemat zbiornika przepływowego.

- **Zakłada się, iż:**
 - do zbiornika wpływa i wypływa zeń nieściśliwa ciecz,
 - przekrój poprzeczny zbiornika ma powierzchnię S ,
 - ściany zbiornika są sztywne.
- Wyznacz zależność pomiędzy ciśnieniem $p(t)$ a **nateżeniami objętościowych przepływów** - wejściowego $q_1(t)$ oraz wyjściowego $q_2(t)$.

Rozwiązanie

- Z warunku ciągłości rozważanych strumieni wynika, że

$$q_1(t) - q_2(t) = S \cdot \frac{dh(t)}{dt} \quad (1)$$

$h(t)$ – poziom cieczy w zbiorniku.

- Ciśnienie $p(t)$ związane jest z poziomem cieczy następującą zależnością

$$p(t) = \rho g h(t) \quad (2)$$

gdzie ρ oznacza gęstość cieczy, zaś g jest przyspieszeniem ziemskim.

- Wynika stąd, że

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{\rho g}{S} \cdot (q_1(t) - q_2(t)) \quad (3)$$

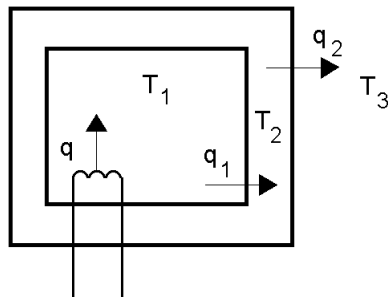
co oznacza, iż

$$p(t) - p(t_0) = \frac{\rho g}{S} \cdot \int_{t_0}^t (q_1(\tau) - q_2(\tau)) d\tau. \quad (4)$$

- Rozważany zbiornik można traktować jako **element całkujący**.
- Wielkość $C = \frac{S}{\rho g}$ to **pojemność hydrauliczna**.

PRZYKŁAD 2 (Wymiana ciepła)

- Rozpatrzmy prosty **zlinearyzowany model procesów wymiany ciepła**, (*opis przybliżony - stałe skupione*).
- Załóżmy zatem (rys. 2),
iż w *komorze termicznej* znajduje się *źródło strumienia energii cieplnej* o wartości $q(t)$.
- Niech
 $T_1(t)$ – temperatura panująca w komorze,
 $T_2(t)$ – temperatura ścian komory,
 $T_3(t)$ – temperatura otoczenia.



Rysunek 2: Schematyczne przedstawienie komory termicznej

- Strumień energii cieplnej przepływającej między wnętrzem komory a jej ścianami:

$$q_1(t) = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{R_1} \quad (5)$$

gdzie przez R_1 oznaczono odpowiednią **rezystancję cieplną**.

- **Bilans energetyczny** dla wnętrza komory ma postać równości:

$$C_1 \frac{dT_1(t)}{dt} = q(t) - \frac{T_1(t) - T_2(t)}{R_1} \quad (6)$$

gdzie C_1 oznacza **pojemność cieplną** komory.

- Model procesu **wymiany ciepła między ścianami komory a otoczeniem**:

$$q_2(t) = \frac{T_2(t) - T_3(t)}{R_2} \quad (7)$$

$$C_2 \frac{dT_2(t)}{dt} = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{R_1} - \frac{T_2(t) - T_3(t)}{R_2} \quad (8)$$

gdzie

R_2 oznacza odpowiednią **rezystancję cieplną**,
 C_2 jest **pojemnością cieplną** ścian komory.

- Zakładając **stałe wartości parametrów** R_1 i R_2 oraz C_1 i C_2 , wyznacz **transmitancje operatorowe**, opisujące:

wpływ wielkości dostarczanego strumienia energii cieplnej oraz wpływ temperatury otoczenia na temperaturę w komorze.

Rozwiązanie

- Z bilansu energetycznego dla wnętrza komory wynika następująca operatorowa relacja:

$$T_1(s) = \frac{R_1}{1 + R_1 C_1 s} \cdot Q(s) + \frac{1}{1 + R_1 C_1 s} \cdot T_2(s) \quad (9)$$

zaś z **bilansu energetycznego** dla ścian komory otrzymujemy

$$T_2(s) = \frac{1}{1 + R_1 / R_2 + R_1 C_2 s} \cdot T_1(s) \quad (10)$$

$$+ \frac{R_1 / R_2}{1 + R_1 / R_2 + R_1 C_2 s} \cdot T_3(s).$$

- Na tej podstawie uzyskujemy poszukiwaną zależność

$$T_1(s) = G_q(s) \cdot Q(s) + G_{T_3}(s) \cdot T_3(s) \quad (11)$$

przy czym transmitancje $G_q(s)$ oraz $G_{T_3}(s)$ zdefiniowane są w sposób następujący:

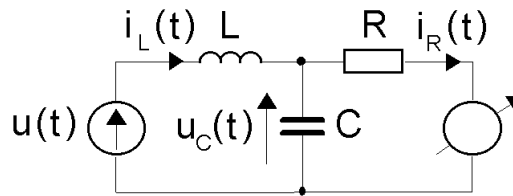
$$G_q(s) = \frac{T_1(s)}{Q(s)} = \frac{R_1 + R_2 + R_1 R_2 C_2 s}{1 + (R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2) s + R_1 C_1 R_2 C_2 s^2} \quad (12)$$

$$G_{T_3}(s) = \frac{T_1(s)}{T_3(s)} = \frac{1}{1 + (R_1 C_1 + R_2 C_1 + R_2 C_2) s + R_1 C_1 R_2 C_2 s^2}. \quad (13)$$

PRZYKŁAD 3

(MODEL UZYSKANY BEZPOŚREDNIO Z RÓWNAŃ RÓŻNICZKOWYCH)

- Dany jest układ dynamiczny jak na rys. 3, złożony z:
 - liniowego obwodu elektrycznego,
 - źródła napięcia zasilającego $u(t)$
 - amperomierza mierzącego prąd wyjściowy $i(t) = y(t)$.
- Należy podać model w przestrzeni stanu tego układu .



Rysunek 3: Schemat układu dynamicznego.

Rozwiązanie

- Zachowanie się rozważanego układu, dla dowolnej chwili czasu t , determinują trzy wielkości:
 - $i_L(t)$ – prąd płynący przez cewkę,
 - $u_C(t)$ – napięcie na kondensatorze,
 - $u(t)$ – napięcie wejściowe.
- Dwie pierwsze z wymienionych wielkości **podsumowują całą przeszłość układu**, są więc parą **zmiennych stanu** tego układu:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} i_L(t) \\ u_C(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (14)$$

- Z równań Kirchoffa

$$u(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} + u_C(t) \quad (15)$$

$$i_L(t) = C \frac{du_C(t)}{dt} + \frac{u_C(t)}{R} \quad (16)$$

otrzymujemy następujący układ **równań stanu**:

$$\frac{di_L(t)}{dt} = -\frac{u_C(t)}{L} + \frac{u(t)}{L} \quad (17)$$

$$\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{i_L(t)}{C} - \frac{u_C(t)}{RC}. \quad (18)$$

- Natomiast odpowiednie **równanie wyjścia** ma postać:

$$y(t) = i_R(t) = \frac{u_C(t)}{R}. \quad (19)$$

- W notacji **wektorowo-macierzowej** równania te można przepisać następująco

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}u(t) \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1/L \\ 1/C & -1/(RC) \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \end{aligned} \quad (20)$$

$$y(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) = [0 \quad 1/R] \mathbf{x}(t). \quad (21)$$

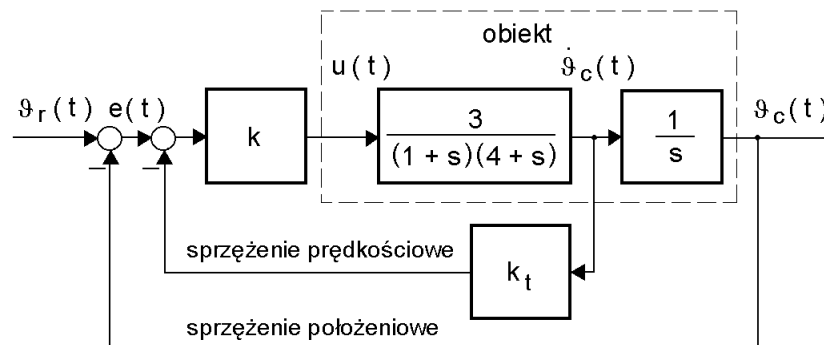
- **Wskazówka:**

liczba zmiennych stanu odpowiada liczbie niezależnych warunków początkowych, niezbędnych do rozwiązania danego równania różniczkowego (układu równań).

PRZYKŁAD 4

(MODEL UZYSKANY BEZPOŚREDNIO ZE SCHEMATU STRUKTURALNEGO - FAZOWE ZMIENNE STANU)

- Model układu *sterowania silnikiem prądu stałego* pokazano na rys. 4.



Rysunek 4: Strukturalny schemat układu sterowania silnikiem.

A) Wyznacz **model w przestrzeni stanu** obciążonego silnika (układ otwarty), przyjmując **fazowe zmienne stanu**:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) & x_2(t) & x_3(t) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} \vartheta_c(t) & \dot{\vartheta}_c(t) & \ddot{\vartheta}_c(t) \end{bmatrix}^T \quad (22)$$

gdzie:

$\vartheta_c(t)$ – położenie kątowne,

$\dot{\vartheta}_c(t)$ – prędkość kątowa,

$\ddot{\vartheta}_c(t)$ – przyspieszenie kątowe wału silnika.

- Należy założyć:
 - sygnał sterujący $u(t)$ jako **wejście**,
 - położenie kątowe $\vartheta_c(t)$ jako **wyjście** $y(t)$.

B) Następnie dla **tych samych fazowych współrzędnych stanu** należy określić **stanowy model zamkniętego układu sterowania**, w którym w **torze głównym** mamy **wzmacniacz mocy** o wzmocnieniu statycznym k , zaś w **torze prędkościowego sprzężenia** umieszczono **tacho-prądnicę** o nachyleniu charakterystyki statycznej równym k_t .

- Jako **wejście** w odpowiednim modelu należy przyjąć sygnał $\vartheta_r(t)$, określający **żądane położenie wału silnika** (układ zamknięty!).

Rozwiązanie

A) Dla **fazowych współrzędnych wektora stanu** zachodzi:

$$\dot{x}_1(t) = \dot{\vartheta}_c(t) = x_2(t) \quad (23)$$

$$\dot{x}_2(t) = \ddot{\vartheta}_c(t) = x_3(t). \quad (24)$$

- Transformaty Laplace'a sygnałów $u(t)$ i $x_2(t)$ spełniają równanie (por. rys. 4):

$$\frac{3}{(1+s)(4+s)}U(s) = X_2(s) \quad (25)$$

- Mnożąc obustronnie przez mianownik, otrzymujemy

$$s^2 X_2(s) = -4X_2(s) - 5sX_2(s) + 3U(s) \quad (26)$$

co jest równoważne (wobec konwencji fazowych zmiennych stanu)

$$\dot{x}_3(t) = -4x_2(t) - 5x_3(t) + 3u(t). \quad (27)$$

- Poszukiwany model w przestrzeni **fazowych zmiennych stanu** ma zatem postać:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}}(t) &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) &= [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t). \end{aligned}$$

- Podkreślamy, iż jest to model 'samego obciążonego silnika'.

B) Dla **zamkniętego układu sterowania** obowiązuje wzór:

$$u(t) = k(e(t) - k_t \dot{\vartheta}_c(t)) = k(\vartheta_r(t) - x_1(t) - k_t x_2(t)) \quad (28)$$

na podstawie którego wnioskujemy, iż

$$\dot{x}_3(t) = -3kx_1(t) - (4 + 3kk_t)x_2(t) - 5x_3(t) + 3k\vartheta_r(t). \quad (29)$$

- Nietrudno przeto, dla tych samych co poprzednio **fazowych zmiennych stanu**, zapisać stanowy model zamkniętego układu sterowania:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3k & -(4 + 3kk_t) & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3k \end{bmatrix} \vartheta_r(t)$$

$$\vartheta_c(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t).$$

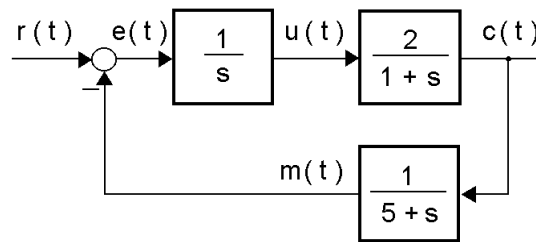
KOMENTARZ:

warto zwrócić uwagę na **specyficzną urodę macierzy stanu** modeli z **fazowymi** współrzędnymi: 'jedynki nad główną diagonalą i tylko ostatni wiersz ma postać szczegółową, odwzorowującą 'konkretne' cechy danego modelu (macierz **Frobeniusa**).

PRZYKŁAD 5

(MODEL UZYSKANY BEZPOŚREDNIO ZE SCHEMATU STRUKTURALNEGO - JAK WYBIERAĆ ZMIENNE STANU)

- Na rys. 5 pokazany jest strukturalny schemat pewnego układu regulacji (sterowania) z **regulatorem całkującym** oraz **inercyjnym czujnikiem wielkości regulowanej**.



Rysunek 5: Strukturalny schemat układu sterowania.

- Podaj **stanowy model** tego układu, przyjmując jako **zmiennie stanu wielkości dostępne pomiarowo w rzeczywistym układzie sterowania**:

$c(t)$ – zmienną sterowaną (wyjście obiektu) ,
 $u(t)$ – sygnał sterujący obiektem,
 $m(t)$ – sygnał z czujnika wielkości sterowanej.

Rozwiązanie

- Dla transformat Laplace'a sygnałów występujących w rozważanym schemacie zapisać można następujące zależności:

$$C(s) = \frac{2}{1+s}U(s), \quad U(s) = \frac{E(s)}{s}, \quad M(s) = \frac{1}{5+s}C(s) \quad (30)$$

gdzie

$$E(s) = R(s) - M(s) \quad (31)$$

oznacza **sygnał różnicowy**, wykorzystywany doysterowania **regulatora całkującego** (I).

- Warto zauważyć, iż sygnał $E(s)$ **nie jest uchybem regulacji!**

Uchyb regulacji to przecież $R(s) - C(s)$!

- W praktyce jednak stosunkowo 'rzadko' spotyka się układy z jednostkowym sprzężeniem zwrotnym!
- Sprawdźmy teraz, czy wektor $\mathbf{x}(t)$, zdefiniowany jako

$$\mathbf{x}(t) = [c(t) \quad u(t) \quad m(t)]^T, \quad (32)$$

może być **wektorem stanu**.

- Ze wzorów (30) oraz (31) wynikają równania

$$sC(s) = -C(s) + 2U(s) \quad (33)$$

$$sU(s) = -M(s) + R(s) \quad (34)$$

$$sM(s) = C(s) - 5M(s) \quad (35)$$

będące **operatorową postacią równań stanu** - co oznacza, iż równania te mają **formalną postać** układu różniczkowych równań liniowych pierwszego rzędu z prawą stroną afinicznie (liniowo) zależną od sygnału wejściowego $r(t)$.

- W konsekwencji otrzymujemy:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}r(t) = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} r(t). \quad (36)$$

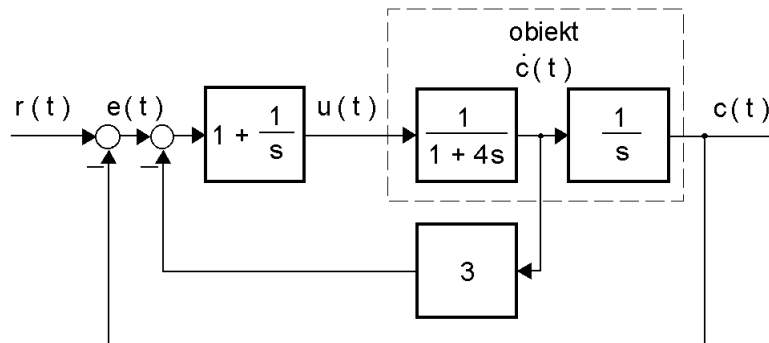
- Przyjmując, iż zmienna sterowana $c(t)$ jest sygnałem wyjściowym w rozważanym modelu w przestrzeni stanu, uzyskuje się następujące równanie wyjścia tego modelu

$$c(t) = \mathbf{c}^T \mathbf{x}(t) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t). \quad (37)$$

PRZYKŁAD 5

(MODEL UZYSKANY BEZPOŚREDNIO ZE SCHEMATU STRUKTURALNEGO - JAK WYBIERAĆ ZMIENNE STANU?)

- Na rys. 6 pokazano strukturalny schemat pewnego układu sterowania, w którym stosuje się: **regulator proporcjonalno-całkujący (PI)** oraz pomocnicze **tachometryczne sprzężenie zwrotne**.



Rysunek 6: Strukturalny schemat układu sterowania.

Praktyczna wskazówka:

jako **zmiennie stanu** dogodnie jest przyjmować **WYJŚCIA** członów wymiernych ściśle właściwych rzędu pierwszego.

- W oparciu o tę maksymę, zbudujemy stosowny **model w przestrzeni stanu** tego układu.
- Zakłada się przy tym:
 - **wejście** w postaci sygnału wielkości zadanej $r(t)$ oraz
 - **wyjście** w postaci wielkości sterowanej $c(t)$.

Rozwiązanie

- Niech

$$x_1(t) = c(t) \quad (38)$$

$$x_2(t) = \dot{c}(t). \quad (39)$$

- Mamy zatem oczywistą zależność

$$\dot{x}_1(t) = x_2(t). \quad (40)$$

- Oznaczmy **wyście członu całkującego w regulatorze *PI*** przez $u_i(t)$.

- Zgodnie z rys. 6 zapisujemy:

$$X_2(s) = \frac{1}{1+4s}U(s) \quad (41)$$

gdzie

$$U(s) = U_i(s) + E(s) - 3X_2(s) \quad (42)$$

$$= U_i(s) + R(s) - X_1(s) - 3X_2(s). \quad (43)$$

- Na tej podstawie wnioskujemy, iż

$$sX_2(s) = -\frac{1}{4}X_2(s) + \frac{1}{4}U(s) \quad (44)$$

$$= \frac{1}{4}X_1(s) - X_2(s) + \frac{1}{4}U_i(s) + \frac{1}{4}R(s) \quad (45)$$

- Jak łatwo spostrzec, pozostaje jeszcze do określenia, czemu równa się $sU_i(s)$ (czyli w domenie czasowej: $\dot{u}_i(t)$). Ponieważ zachodzi

$$\frac{1}{s}(R(s) - X_1(s) - 3X_2(s)) = U_i(s) \quad (46)$$

zatem mamy

$$sU_i(s) = -X_1(s) - 3X_2(s) + R(s). \quad (47)$$

- W konsekwencji, uzyskujemy następujący **model w przestrzeni stanu**:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1/4 & -1 & 1/4 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/4 \\ 1 \end{bmatrix} r(t) \quad (48)$$

$$c(t) = [1 \ 0 \ 0] \mathbf{x}(t), \quad (49)$$

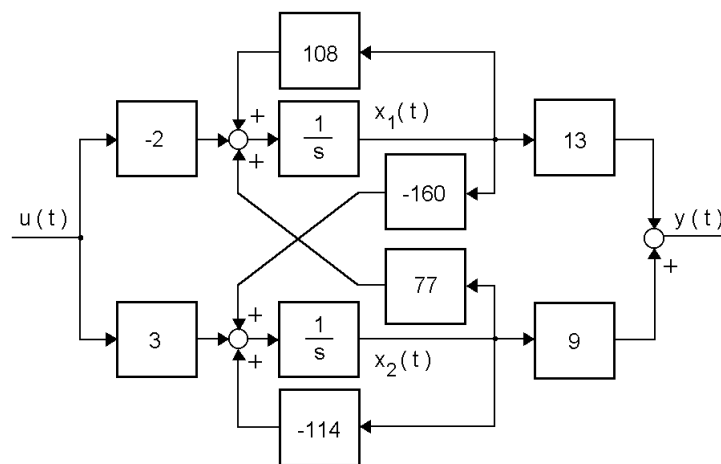
gdzie

$$\mathbf{x}(t) = [c(t) \ \dot{c}(t) \ u_i(t)]^T \quad (50)$$

jest wektorem stanu.

PRZYKŁAD 7
 (MODELE W PRZESTRZENI STANU WYPROWADZANE
 Z TRANSMITANCJI OPERATOROWYCH)

- Dany jest symulacyjny schemat pewnego obiektu dynamicznego drugiego rzędu (rys. 7):



Rysunek 7: Symulacyjny schemat obiektu dynamicznego drugiego rzędu.

- Określ model w **przestrzeni stanu** tego obiektu, przyjmując jako **zmienne stanu wyjścia idealnych członów całujących**.
- Oblicz **operatorową transmitancję** $G(s) = Y(s)/U(s)$ oraz **odpowieź impulsową** rozważanego obiektu.

Rozwiązanie

- Na podstawie rys. 7 zapisujemy **równania stanu**

$$\dot{x}_1(t) = 108x_1(t) + 77x_2(t) - 2u(t) \quad (51)$$

$$\dot{x}_2(t) = -160x_1(t) - 114x_2(t) + 3u(t) \quad (52)$$

oraz **równanie wyjścia**

$$y(t) = 13x_1(t) + 9x_2(t). \quad (53)$$

- Parametry (\mathbf{A} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , d) modelu w przestrzeni stanu mają zatem wartość:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 108 & 77 \\ -160 & -114 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} 13 \\ 9 \end{bmatrix}, \quad d = 0. \quad (54)$$

- **Operatorową postać $\Phi(s)$ macierzy fundamentalnej** obliczamy następująco:

$$\begin{aligned} \Phi(s) &= (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} = \begin{bmatrix} s - 108 & -77 \\ 160 & s + 114 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{114+s}{(2+s)(4+s)} & \frac{77}{(2+s)(4+s)} \\ \frac{-160}{(2+s)(4+s)} & \frac{-108+s}{(2+s)(4+s)} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (55)$$

- Poszukiwana macierz fundamentalna $\Phi(t)$ wynika zatem z poniższych przekształceń:

$$\begin{aligned} \Phi(t) &= \exp(\mathbf{A}t) = \mathcal{L}^{-1} [(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}] \\ &= \begin{bmatrix} 56e^{-2t} - 55e^{-4t} & 77e^{-2t}/2 - 77e^{-4t}/2 \\ -80e^{-2t} + 80e^{-4t} & -55e^{-2t} + 56e^{-4t} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (56)$$

- Transmitancję operatorową rozważanego obiektu otrzymujemy ze wzoru

$$\begin{aligned}
 G(s) &= \mathbf{c}^T \Phi(s) \mathbf{b} + d & (57) \\
 &= [13 \ 9] \begin{bmatrix} \frac{114+s}{(2+s)(4+s)} & \frac{77}{(2+s)(4+s)} \\ \frac{-160}{(2+s)(4+s)} & \frac{108+s}{(2+s)(4+s)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{3+s}{(2+s)(4+s)}.
 \end{aligned}$$

- Odpowiedź impulsowa $g(t)$ tego obiektu dana jest wzorem

$$\begin{aligned}
 g(t) &= \mathbf{c}^T \Phi(t) \mathbf{b} + d & (58) \\
 &= [13 \ 9] \begin{bmatrix} 56e^{-2t} - 55e^{-4t} & 77e^{-2t}/2 - 77e^{-4t}/2 \\ -80e^{-2t} + 80e^{-4t} & -55e^{-2t} + 56e^{-4t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} \\
 &= \frac{e^{-2t}}{2} + \frac{e^{-4t}}{2}, \quad t \geq 0.
 \end{aligned}$$

- Taką samą postać odpowiedzi $g(t)$ uzyskuje się, korzystając ze wzoru

$$g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)].$$

PRZYKŁAD 8

(DIAGONALIZACJA MACIERZY STANU - WYZNACZANIE MACIERZY FUNDAMENTALNEJ)

- Należy wyznaczyć macierz modalną \mathbf{M} diagonalizującą macierz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$$

oraz podać postać macierzy fundamentalnej $\exp(\mathbf{A}t)$.

Rozwiązanie

- Wartości własne macierzy \mathbf{A} uzyskujemy na podstawie **równania charakterystycznego**

$$\det(\lambda \mathbf{I}_2 - \mathbf{A}) = (2 + \lambda)(4 + \lambda) = 0. \quad (59)$$

$$\Downarrow$$

$$\text{spectr } \mathbf{A} = \{\lambda_1, \lambda_2\} = \{-2, -4\}. \quad (60)$$

- Wartości własne $\lambda_1 = -2$ oraz $\lambda_2 = -4$ macierzy \mathbf{A} można 'bezpośrednio odczytać' z postaci tej macierzy.
- Mamy bowiem do czynienia z **macierzą trójkątną**
- *elementy diagonalne takich macierzy stanowią ich widmo.*
- **Wektory własne** $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in R^2$, odpowiadające poszczególnym wartościom własnym, uzyskuje się rozwiązując równania

$$(\mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I})\mathbf{x}_i = 0, \quad i = 1, 2. \quad (61)$$

- Tak postępując, uzyskujemy następujące **PRZYKŁADOWE** rozwiązania:

$$\lambda_1 = -2 : \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_1^1 \\ x_2^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\lambda_1 = -4 : \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_2^1 \\ x_2^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

- Macierz modalna ma zatem postać

$$\mathbf{M} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2] = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Macierz odwrotna dana jest wzorem

$$\mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1^T \\ \mathbf{y}_2^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix}.$$

- Na tej podstawie otrzymujemy

$$\begin{aligned} \exp(\mathbf{A}t) &= \sum_{i=1}^2 \mathbf{x}_i \mathbf{y}_i^T e^{\lambda_i t} = \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1^T e^{\lambda_1 t} + \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2^T e^{\lambda_2 t} = \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 0 \end{bmatrix} e^{-2t} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} e^{-4t} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 0 \\ (e^{-2t} - e^{-4t})/2 & e^{-4t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

- Sprawdźmy jeszcze, czy macierz modalna \mathbf{M} diagonalizuje macierz \mathbf{A} :

$$\mathbf{M}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{M} = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}.$$

KOMENTARZ:

(i) Przy wyznaczaniu modalnej macierzy \mathbf{M} przyjmować można **dowolne wektory własne** związane z wartościami własnymi diagonalizowanej macierzy \mathbf{A} – wynika stąd, iż macierz diagonalizująca **nie jest określona w sposób jednoznaczny**.

(ii) Oczywistą przesłanką niejednoznaczności wyboru macierzy diagonalizującej jest także możliwość *permutacji* elementów diagonalnych macierzy Λ .

(iii) Zauważmy ponadto, że przyjęte założenie o **jednokrotności wartości własnych** danej macierzy \mathbf{A} , stanowiąc **warunek wystarczający** jej diagonalizowalności, nie jest wszelako **warunkiem koniecznym**.

Przedstawioną procedurę **diagonalizacji można bowiem uogólnić** na przypadek macierzy diagonalizowanej \mathbf{A} o **wielokrotnych wartościach własnych**.

Diagonalizacja taka jest możliwa o ile *tylko liczba liniowo niezależnych wektorów własnych związanych z daną wartością własną $\lambda \in \text{spectr}\mathbf{A}$ badanej macierzy (jest to tak zwana krotność geometryczna $\sigma(\lambda)$ wartości własnej λ) równa się arytmetycznej krotności tej wartości własnej (czyli krotności odpowiedniego pierwiastka równania charakterystycznego)*.

PRZYKŁAD 9
(DYNAMICZNE MODELE PODOBNE)

- Sprawdź, czy następujące dwa modele **opisują ten sam obiekt dynamiczny** (w sensie pewnej **relacji podobieństwa**):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [3 \ 2] \mathbf{x}(t) \end{cases} \quad (62)$$

oraz

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{z}}(t) = \begin{bmatrix} -28 & -73 \\ 10 & 26 \end{bmatrix} \mathbf{z}(t) + \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} u(t) \\ y(t) = [7 \ 19] \mathbf{z}(t) \end{cases} \quad (63)$$

Rozwiązanie

- Załóżmy, że istnieje nieosobliwa macierz

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \quad (64)$$

taka, że

$$\mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{P} = \begin{bmatrix} -28 & -73 \\ 10 & 26 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[3 \ 2] \mathbf{P} = [7 \ 19]$$

- Wzorum tym nadać można bardziej dogodną postać:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -28 & -73 \\ 10 & 26 \end{bmatrix} \quad (65)$$

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (66)$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 19 \end{bmatrix}. \quad (67)$$

- Wzory te **dostarczają ośmiu liniowych równań**, z których należy wyznaczyć **cztery poszukiwane elementy macierzy podobieństwa \mathbf{P}** .

- O ile równania te **nie są sprzeczne** (założenie o istnieniu macierzy \mathbf{P} jest wówczas **fałszywe**), dokonać tego można, wyróżniając spośród nich **cztery równania liniowo niezależne**.

- Tak postępując, ze wzoru (65), uzyskuje się równania

$$\begin{aligned} p_{21} &= -28p_{11} + 10p_{12} \\ p_{22} &= -73p_{11} + 26p_{12}. \end{aligned}$$

- Z kolei, ze wzorów (66) oraz (67) wynika, iż

$$\begin{aligned} p_{12} &= 3p_{11} \\ 3p_{11} + 2p_{21} &= 7. \end{aligned}$$

- Na tej podstawie wnioskujemy, że $p_{21} = 2p_{11}$ $p_{22} = 5p_{11}$ oraz $p_{11} = 1$, co czyni

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}. \quad PJSuchomski$$