

METODY CZĘSTOTLIWOŚCIOWE – KRYTERIUM NYQUISTA

Przykład 1

Wykreśl charakterystykę Nyquista odpowiadającą transmitancji pewnego układu otwartego

$$G_0(s) = \frac{k_0}{(-1+s)(3+s)(4+s)}, \quad k_0 > 0. \quad (1)$$

Kładąc $k_0 = 20$, zbadaj czy układ po zamknięciu pętli jednostkowego ujemnego sprzężenia zwrotnego będzie układem stabilnym.

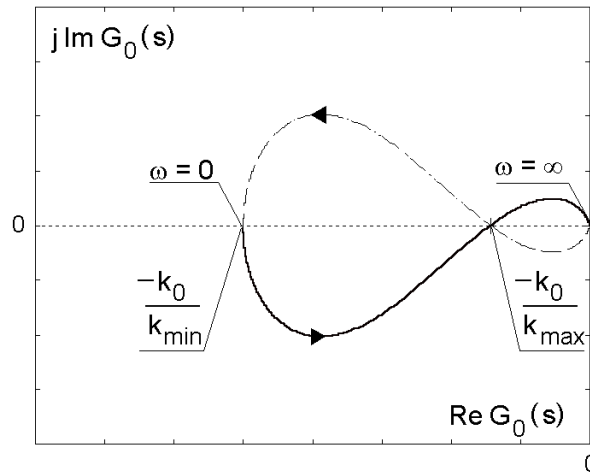
- Argument widmowej transmitancji $G_0(j\omega)$:

$$\arg G_0(j\omega) = -180^\circ + \arctan \omega - \arctan \left(\frac{\omega}{3} \right) - \arctan \left(\frac{\omega}{4} \right).$$

- Mamy zatem $\arg G_0(j\omega)|_{\omega=0} = -180^\circ$ oraz $\arg G_0(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} = -270^\circ$. Ponadto, dla $\omega \in O^+(0)$ obowiązuje zależność

$$\begin{aligned} \arg G_0(j\omega) &= -180^\circ + \arctan \omega - \arctan \left(\frac{7\omega}{12 - \omega^2} \right) \\ &= -180^\circ + \arctan \left(\frac{\omega(5 - \omega^2)}{12 + 6\omega^2} \right) \end{aligned}$$

z której wynika, że $\arg G_0(j\omega)|_{\omega \in (0, \sqrt{5})} > -180^\circ$.



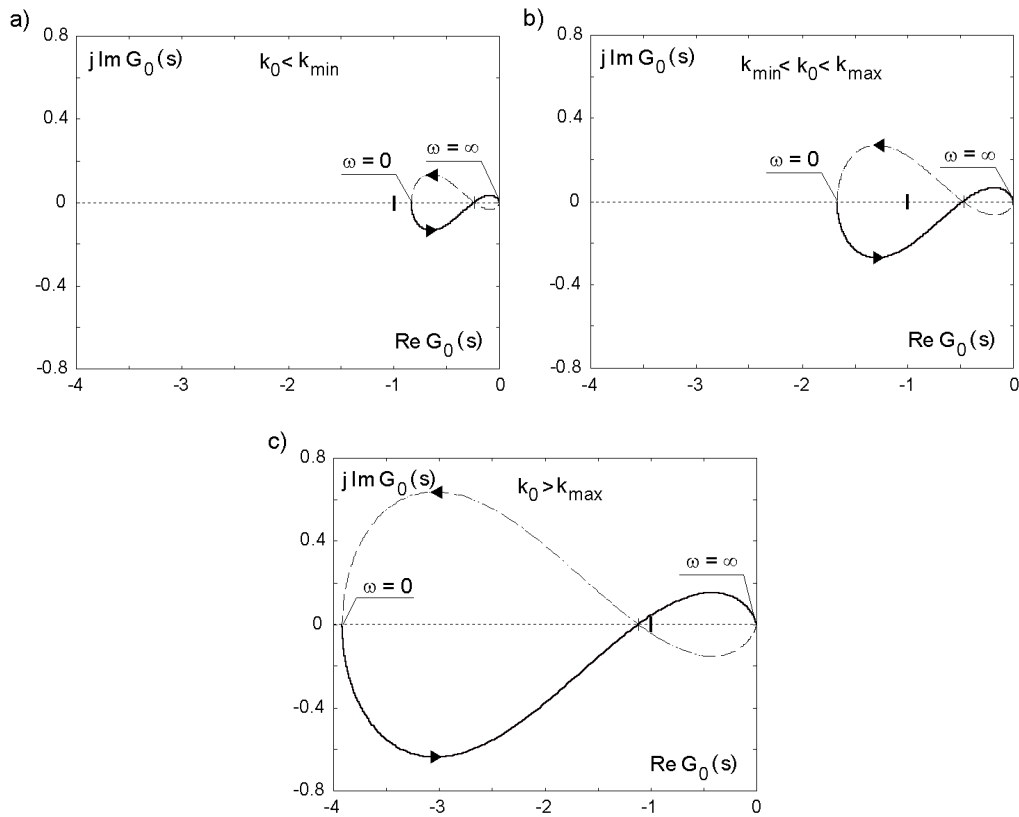
Rysunek 1: Przykład 1: charakterystyka Nyquista układu otwartego.

- Aby odpowiedzieć na pytanie o stabilność układu zamkniętego, należy rozważyć położenie punktów $-k_0/k_{\min}$ oraz $-k_0/k_{\max}$ na ujemnej rzeczywistej półosi płaszczyzny zespolonej w stosunku do położenia punktu $(-1, j0)$.
- Możliwe są trzy przypadki:
 - $k_0 < k_{\min}$, któremu odpowiada $N = 0$ (rys. 2a),
 - $k_{\min} < k_0 < k_{\max}$, dla którego $N = -1$ (rys. 2b),
 - $k_0 > k_{\max}$, w którym przyjmujemy $N = 1$ (rys. 2c),
 gdzie

$$k_{\min} = \frac{1}{|G_0(j\omega)|} \Big|_{k_0=1, \omega=0} = 12$$

$$k_{\max} = \frac{1}{|G_0(j\omega)|} \Big|_{k_0=1, \omega=\sqrt{5}} = 42$$

zaś N określa, ile razy rozważana charakterystyka obchodzi zgodnie z ruchem wskazówek zegara punkt $(-1, j0)$, gdy ω zmienia się od $-\infty$ do $+\infty$.



Rysunek 2: Przykład 1: charakterystyka Nyquista układu otwartego.

- Ponieważ transmitancja układu otwartego (1) ma jeden biegun w prawej półpłaszczyźnie zespolonej ($P = 1$), zatem tylko drugi z powyższych przypadków (to znaczy, gdy $N = -1$) odpowiada stabilnemu układowi zamkniętemu.
- liczba biegunów transmitancji układu zamkniętego, leżących w prawej półpłaszczyźnie zespolonej wynosi

$$Z = N + P = -1 + 1 = 0.$$

- W pierwszym przypadku ($N = 0$) transmitancja układu zamkniętego będzie miała jeden biegun w prawej półpłaszczyźnie zespolonej

$$Z = N + P = 0 + 1 = 1.$$

- Zaś w przypadku trzecim ($N = 1$) – będą dwa takie bieguny

$$Z = N + P = 1 + 1 = 2.$$

- A zatem przy $k_0 = 20$ (czyli dla $k_{\min} < k_0 < k_{\max}$ – co odpowiada drugiemu przypadkowi) rozważany układ regulacji będzie układem stabilnym w sensie *BIBO*. Z rys. 2 wynika, że w tym przypadku można mówić o dwóch zapasach wzmocnienia

$$M_g^+ = 20 \log \left(\frac{k_{\max}}{k_0} \right) = 6.44 \text{ dB}$$

oraz

$$M_g^- = 20 \log \left(\frac{k_0}{k_{\min}} \right) = 4.44 \text{ dB}.$$

- Zapas M_g^+ jest miarą odporności stabilności zamkniętego układu regulacji na wzrost wartości parametru k_0 układu otwartego. Z kolei, zapas M_g^- mówi o odporności stabilności układu zamkniętego w przypadku spadku wartości tego parametru.

Przykład 2

Stosując kryterium Nyquista, zbadaj stabilność zamkniętego układu regulacji z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym, jeżeli wiadomo, że transmitancja toru głównego tego układu ma postać

$$G_0(s) = \frac{k(1 + T_0s)}{(-1 + T_1s)(1 + T_2s)(1 + T_3s)} \quad (2)$$

przy czym $k = 10$, $T_0 = 0.05$ s, $T_1 = 0.1$ s, $T_2 = 0.02$ s oraz $T_3 = 0.25$ s.

- Dla układu otwartego mamy

$$G_0(j\omega) = \frac{k(1 + j\omega T_0)}{(-1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)(1 + j\omega T_3)} = U(\omega) + jV(\omega)$$

gdzie

$$U(\omega) = \frac{-10 - 3.05 \cdot 10^{-1} \cdot \omega^2 - 2.5 \cdot 10^{-4} \cdot \omega^4}{1 + 7.29 \cdot 10^{-2} \cdot \omega^2 + 6.54 \cdot 10^{-4} \cdot \omega^4 + 2.5 \cdot 10^{-7} \cdot \omega^6} \quad (3)$$

$$V(\omega) = \frac{\omega(1.2 - 6 \cdot 10^{-3} \cdot \omega^2)}{1 + 7.29 \cdot 10^{-2} \cdot \omega^2 + 6.54 \cdot 10^{-4} \cdot \omega^4 + 2.5 \cdot 10^{-7} \cdot \omega^6} \quad (4)$$

- Ze wzorów (3) i (4) wynika co następuje:

$$\omega = 0 : U(\omega) = -10, \quad V(\omega) = 0$$

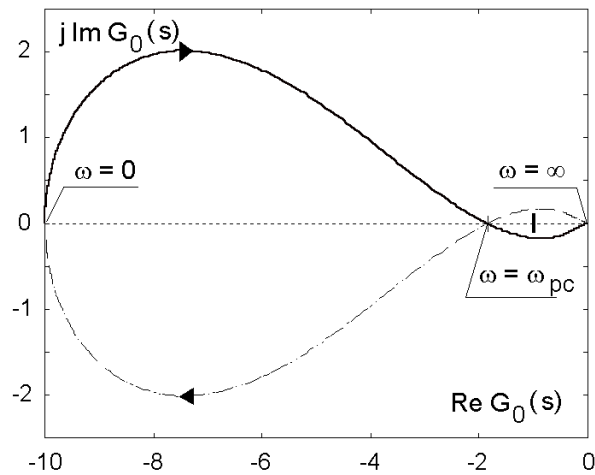
$$0 \leq \omega < \infty : U(\omega) < 0$$

$$\omega \rightarrow \infty : U(\omega) \rightarrow 0, \quad V(\omega) \rightarrow 0$$

$$\omega = \omega_{pc} = \sqrt{\frac{1.2}{0.006}} = \sqrt{200} : U(\omega) = -1.85185, \quad V(\omega) = 0$$

$$0 < \omega < \omega_{pc} : V(\omega) > 0$$

$$\omega_{pc} < \omega < \infty : V(\omega) < 0.$$



Rysunek 3: Przykład 2: charakterystyka Nyquista otwartego układu regulacji.

- W myśl podstawowej reguły związanej z kryterium Nyquista mamy

$$Z = N + P$$

gdzie: Z – liczba biegunów zamkniętego układu leżących w prawej półpłaszczyźnie zespolonej, N – liczba okrążeń punktu kontrolnego $(-1, j0)$ zgodnych z ruchem wskazówek zegara przy poruszaniu się wzdłuż charakterystyki Nyquista dla pulsacji ω zmieniającej się od $-\infty$ do $+\infty$, P – liczba biegunów układu otwartego, należących do prawej półpłaszczyzny zespolonej.

- Ze wzoru (2) wynika, że jeden biegun transmitancji badanego układu otwartego znajduje się w prawej półpłaszczyźnie zespolonej ($P = 1$).

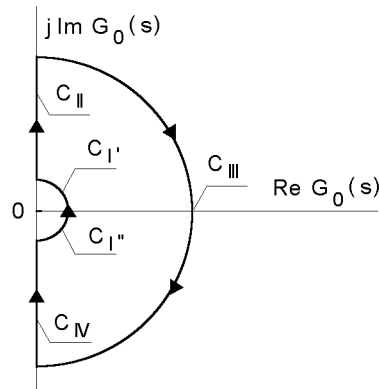
Na podstawie rys. 3 otrzymujemy $N = -1$. Ponieważ $Z = 0$, zatem rozważany układ zamknięty jest stabilny.

Przykład 3

Transmitancja układu otwartego:

$$G_0(s) = \frac{k}{s^2(3+s)}, \quad k > 0. \quad (5)$$

Korzystając z kryterium Nyquista, określ liczbę biegunów transmitancji odpowiedniego układu zamkniętego (jednostkowe ujemne sprzężenie zwrotne), leżących w prawej półpłaszczyźnie.



Rysunek 4: Przykład 3: kontur Cauchy'ego dla układu z biegunem w zerze.

- Transmitancja (5) posiada podwójny biegun dla $s = 0$. Kontur Cauchy'ego \mathcal{C} , stosowny dla tego przypadku, przedstawiono na rys. 4, wyróżniając pięć fragmentów:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{I'} &: s = \rho e^{j\varphi}, \quad \rho > 0, \quad 0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ \\
 \mathcal{C}_{II} &: s = j\omega, \quad \rho < \omega < \infty \quad \rho > 0 \\
 \mathcal{C}_{III} &: s = \pm j\infty \\
 \mathcal{C}_{IV} &: s = j\omega, \quad -\infty < \omega < -\rho, \quad \rho > 0 \\
 \mathcal{C}_{I''} &: s = \rho e^{j\varphi}, \quad \rho > 0, \quad -90^\circ \leq \varphi < 0^\circ.
 \end{aligned} \quad (6)$$

- Odwzorowanie

$$G_0 : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}, \quad s \mapsto G_0(s)$$

przy $\rho \rightarrow 0^+$, wyznacza charakterystykę Nyquista układu otwartego (5). Dla $s \in \mathcal{C}_{I'}$ mamy

$$G_0(s)|_{s \in \mathcal{C}_{I'}} = \frac{k}{\rho^2 e^{j2\varphi} (3 + \rho e^{j\varphi})}$$

a zatem dla dostatecznie małego promienia $\rho > 0$:

$$G_0(s)|_{s=\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=0^\circ} \approx \frac{k}{3\rho^2} > 1$$

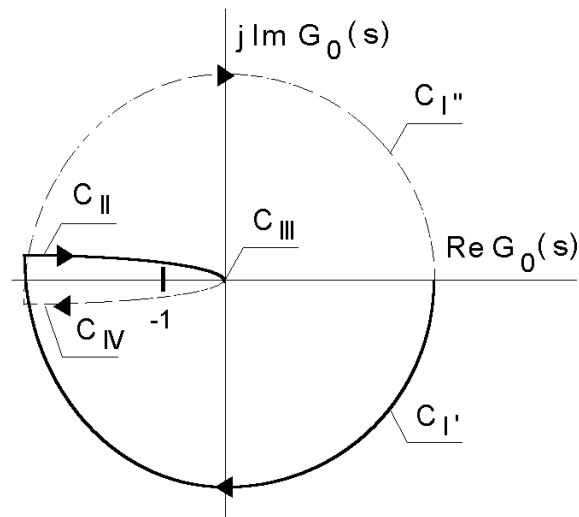
$$|G_0(s)|_{s=\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=90^\circ} \approx \frac{k}{3\rho^2} > 1$$

$$\arg G_0(s)|_{s=\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=90^\circ} = -180^\circ - \arctan\left(\frac{\rho}{3}\right).$$

- Dla $s = \rho e^{j90^\circ}$, $\rho > 0$, zachodzi $\arg G_0(s) < -180^\circ$. Na tej podstawie wnioskujemy, że charakterystyka Nyquista układu (5) przechodzi do drugiej ćwiartki płaszczyzny zmiennej zespolonej s .
- Gdy $s \in \mathcal{C}_{II}$, wtedy $\arg G_0(s)|_{s \in \mathcal{C}_{II}} = -180^\circ - \arctan(\omega/3)$.
- Dla $s \in \mathcal{C}_{II}$ zachodzi $\lim_{s \rightarrow \infty} |G_0(s)| = 0$.
- Przebieg charakterystyki Nyquista dla

$$s \in \mathcal{C}_{I'} \cup \mathcal{C}_{II} \cup \mathcal{C}_{III}$$

oraz pewnego promienia $\rho > 0$ pokazano na rys. 5. Symetryczny fragment tej charakterystyki, odpowiadający $s \in \mathcal{C}_{IV} \cup \mathcal{C}_{I''}$, zaznaczono linią przerywaną.



Rysunek 5: Przykład 3: charakterystyka Nyquista układu otwartego z podwójnym biegunem w zerze.

- Jak widzimy, liczba okrążeń kontrolnego punktu $(-1, j0)$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara wynosi

$$N = 2.$$

- Ponieważ badany układ otwarty nie posiada biegunów w otwartej prawej półpłaszczyźnie zespolonej

$$P = 0$$

(funkcja $G_0(s)$ jest funkcją analityczną dla s należących do wnętrza $\text{Int } \mathcal{C}$ konturu Cauchy'ego \mathcal{C}), zatem liczba biegunów transmitancji układu zamkniętego w otwartej prawej półpłaszczyźnie zespolonej wynosi

$$Z = N + P = 2.$$

Przykład 4

Wykreśl charakterystykę Nyquista transmitancji

$$G_0(s) = \frac{k(2+s)}{s(-1+s)}, \quad k > 0. \quad (7)$$

pewnego układu otwartego. Dla jakich k układ zamknięty z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym będzie układem stabilnym?

- Transmitancja (7) ma biegun dla $s = 0$. Kontur Cauchy'ego \mathcal{C} dla tego przypadku dany jest wzorem (6) (zob. rys. 4). Odwzorowanie $G_0 : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{C}$, $s \mapsto G_0(s)$, przy $\rho \rightarrow 0^+$, wyznacza przebieg charakterystyki Nyquista tego układu. Dla $s \in \mathcal{C}_{I'}$ zachodzi

$$G_0(s)|_{s \in \mathcal{C}_{I'}} = \frac{k(2 + \rho e^{j\varphi})}{\rho e^{j\varphi}(-1 + \rho e^{j\varphi})}$$

a zatem, gdy tylko $\rho > 0$ jest dostatecznie 'małe':

$$G_0(s)|_{s=\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=0^\circ} \approx -\frac{2k}{\rho} \quad (8)$$

$$|G_0(s)|_{s=\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=90^\circ} \approx \frac{2k}{\rho}$$

$$\arg G_0(s)|_{s=\rho e^{j\varphi}, \rho>0, \varphi=90^\circ} = -270^\circ + \arctan\left(\frac{\rho}{2}\right) + \arctan \rho. \quad (9)$$

- Dla $s \in \mathcal{C}_{II}$ mamy

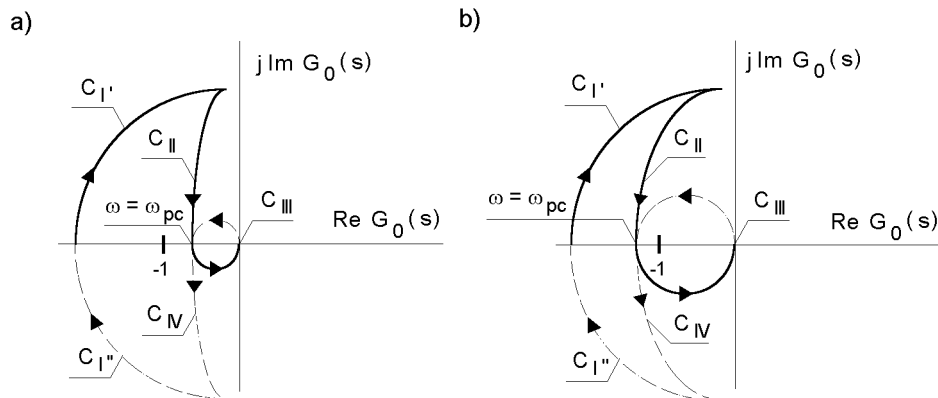
$$\arg G_0(s)|_{s \in \mathcal{C}_{II}} = \begin{cases} -270^\circ + \arctan\left(\frac{3\omega}{2-\omega^2}\right) & \text{dla } \omega < \sqrt{2} \\ -180^\circ & \text{dla } \omega = \sqrt{2} \\ -90^\circ + \arctan\left(\frac{3\omega}{2-\omega^2}\right) & \text{dla } \omega > \sqrt{2}. \end{cases} \quad (10)$$

- Z kolei, dla $s \in \mathcal{C}_{III}$ zachodzi $\lim_{s \rightarrow \infty} |G_0(s)| = 0$.
- Ze wzorów (8) oraz (9) wynika, że dla $s \in \mathcal{C}_{I'}$ charakterystyka Nyquista układu otwartego (7) zawiera się tylko w drugiej ćwiartce. Z kolei, na podstawie wzoru (10) wnioskujemy, że przy pulsacji $\omega = \omega_{pc} = \sqrt{2}$ charakterystyka Nyquista przechodzi do trzeciej ćwiartki.
- Dla $\omega = \omega_{pc}$ zachodzi $G_0(j\omega_{pc}) = -k$.
- Charakterystyki Nyquista układu (7) wykreślamy dla

$$s \in \mathcal{C}_{I'} \cup \mathcal{C}_{II} \cup \mathcal{C}_{III}, \quad \rho > 0$$

Przebieg ten na rys. 6 uzupełniono (linia przerywana) fragmentem odpowiadającym

$$s \in \mathcal{C}_{IV} \cup \mathcal{C}_{I''}.$$



Rysunek 6: Przykład 4: charakterystyka Nyquista niestabilnego układu otwartego ($P = 1$), który po zamknięciu pętli ujemnego sprzężenia zwrotnego: **a)** pozostaje niestabilny ($N = 1$, $Z = N + P = 2$), **b)** jest stabilny ($N = -1$, $Z = N + P = 0$).

- Rys. 6a dotyczy przypadku **a**), w którym $k < 1$, zaś rys. 6b – przypadku **b**), gdy $k > 1$. Tylko drugi z tych przypadków odpowiada stabilnemu układowi zamkniętemu.
- Transmitancja (7) posiada jeden biegun $s = 1$ w otwartej prawej półpłaszczyźnie. Mamy zatem

$$P = 1.$$

- W pierwszym z wyróżnionych przypadków, przy $k < 1$, charakterystyka Nyquista otwartego układu (7) okrąży jeden raz punkt kontrolny $(-1, j0)$ zgodnie z ruchem wskazówek zegara (rys. 6a)

$$N = 1.$$

Odpowiedni układ zamknięty jest zatem niestabilny i jego transmitancja ma dwa bieguny w prawej półpłaszczyźnie zespolonej

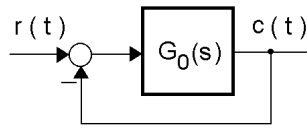
$$Z = N + P = 2.$$

- W przypadku **b**), to znaczy przy $k > 1$, charakterystyka Nyquista układu otwartego (7) jednokrotnie obiega punkt $(-1, j0)$ przeciwnie do ruchu wskazówek zegara (rys. 6b)

$$N = -1$$

co oznacza, że dla tego przypadku zamknięty układ jest stabilny

$$Z = N + P = 0.$$



Rysunek 7: Schemat układu zamkniętego.

- Dla układu z rys. 7 definiujemy pulsację odcięcia charakterystyki amplitudowej ω_{gc} oraz pulsację odcięcia charakterystyki fazowej ω_{pc} układu otwartego, odpowiednio:

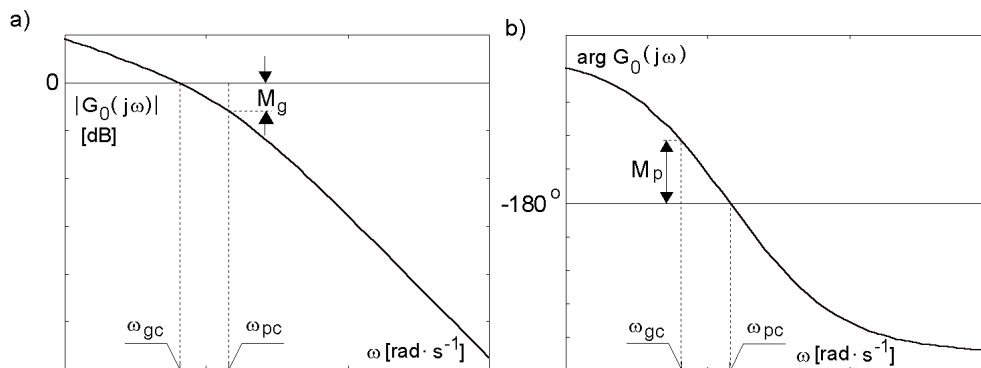
$$\omega_{gc} : |G_0(j\omega_{gc})| = 1$$

$$\omega_{pc} : \arg G_0(j\omega_{pc}) = -180^\circ.$$

- Na tej podstawie wyznaczamy zapasy (marginesy) stabilności układu zamkniętego – zapas wzmocnienia M_g (Δ_g) oraz zapas fazy M_p (Δ_p), odpowiednio (rys. 8):

$$M_g = 20 \log(1/|G_0(j\omega_{pc})|)$$

$$M_p = 180^\circ + \arg G_0(j\omega_{gc}).$$



Rysunek 8: Charakterystyki układu otwartego: a) amplitudowa, b) fazowa.

METODY CZĘSTOTLIWOŚCIOWE – REGULATORY P oraz I

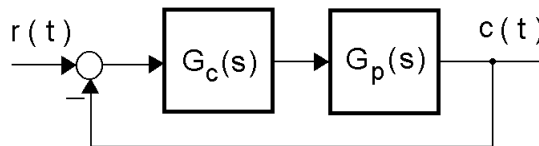
Przykład 5: regulator P

- Dany jest układ regulacji (rys. 9), złożony z obiektu o transmitancji

$$G_p(s) = \frac{0.4}{s(1 + 0.4s)(1 + 8.2s)}$$

oraz regulatora proporcjonalnego o transmitancji

$$G_c(s) = k_c.$$



Rysunek 9: Strukturalny schemat układu regulacji

- Wyznacz wzmocnienie k_c tego regulatora, zapewniające zamkniętemu układowi zapas fazy $\Delta_p = 45^\circ$.
- Oszacuj:
 - wskaźnik oscylacyjności M_r ,
 - pulsację rezonansową ω_r oraz
 - pasmo przenoszenia ω_{3dB}
 zaprojektowanego układu.

- Pulsacja odcięcia ω_{gc} amplitudowej charakterystyki transmitancji

$$G_0(s) = k_c G_p(s)$$

układu otwartego spełnia równanie

$$\arg G_0(j\omega_{gc}) = \Delta_p - 180^\circ.$$

- Dla rozważanego obiektu mamy:

$$-90^\circ - \arctan(0.4\omega_{gc}) - \arctan(8.2\omega_{gc}) = 45^\circ - 180^\circ.$$

↓

$$3.28\omega_{gc}^2 + 8.6\omega_{gc} - 1 = 0$$

↓

$$\omega_{gc} = 0.1115 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- Ponieważ dla pulsacji ω_{gc} zachodzi

$$|G_0(j\omega_{gc})| = |k_c G_p(j\omega_{gc})| = 1$$

↓

$$k_c = 1/|G_p(j\omega_{gc})|.$$

- Po podstawieniu $|G_p(j\omega_{gc})| = 2.6438$, otrzymujemy

$$k_c = 0.3782.$$

- MATLAB głosi, że:

$$M_r = 1.308, \omega_r = 0.109 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, \omega_{3\text{dB}} = 0.184 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Przykład 6: regulator I

- Układ regulacji (rys. 9) złożony jest z obiektu o operatorowej transmitancji

$$G_p(s) = \frac{3}{(1 + 4s)(1 + 12s)}$$

oraz regulatora całkującego opisanego transmitancją

$$G_c(s) = \frac{k_c}{s}.$$

- Wyznacz parametr $k_c > 0$ tego regulatora, przy którym zamknięty układ charakteryzuje się zapasem wzmocnienia $\Delta_g = 12$ dB.
- Oszacuj zapas fazy Δ_p oraz pasmo przenoszenia ω_{3dB} tego układu.
- Pulsacja odcięcia ω_{pc} fazowej charakterystyki transmitancji układu otwartego

$$G_0(s) = \frac{k_c}{s} \cdot G_p(s)$$

spełnia równanie

$$\arg G_0(j\omega_{pc}) = -180^\circ.$$

- Mamy

$$\arg \left(\frac{G_p(j\omega)}{j\omega} \right) = -90^\circ - \arctan(4\omega) - \arctan(12\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$\arctan(4\omega_{pc}) + \arctan(12\omega_{pc}) = \arctan \left[\frac{16\omega_{pc}}{1 - 48\omega_{pc}^2} \right] = 90^\circ.$$

$$\Downarrow$$

$$\omega_{pc} = 0.1443 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- Wymaganie dotyczące zapasu modułu zapisujemy w postaci równania

$$20 \log \left(\frac{1}{\frac{k_c}{\omega_{pc}} \cdot |G_p(j\omega_{pc})|} \right) = \Delta_g$$

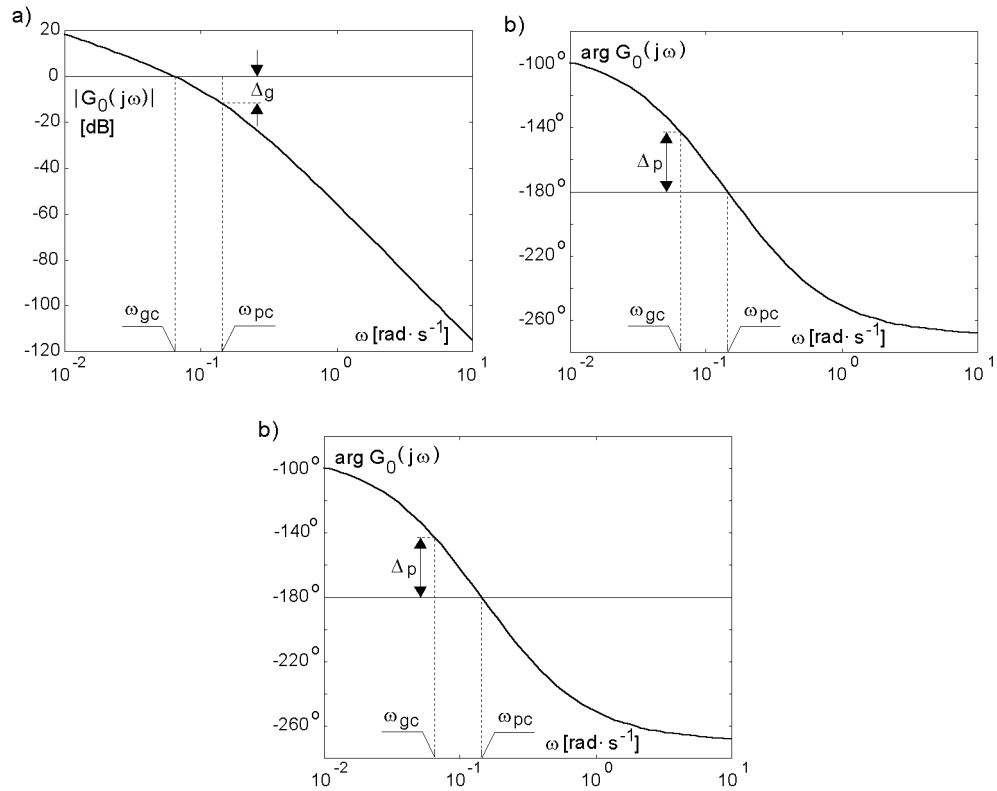
$$\Downarrow$$

$$k_c = 10^{-\Delta_g/20} \cdot \frac{\omega_{pc}}{|G_p(j\omega_{pc})|}$$

$$\Downarrow$$

$$k_c = 0.0279.$$

- Zapas fazy odczytać można z charakterystyk częstotliwościowych układu otwartego (rys. 10a,b).



Rysunek 10: Przykład 6: charakterystyki częstotliwościowe transmitancji układu regulacji: a,b - układ otwarty, c - układ zamknięty.

- Zapas fazy wynosi $\Delta_p \approx 38^\circ$ przy pulsacji odcięcia charakterystyki amplitudowej transmitancji $G_0(s)$ układu otwartego równej $\omega_{gc} \approx 0.064 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.
- Pasma $\omega_{3\text{dB}} \approx 0.11 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ odczytujemy z charakterystyki amplitudowej $|G(j\omega)|$ zamkniętego układu regulacji (rys. 10c).

Przykład 7: model nieparametryczny

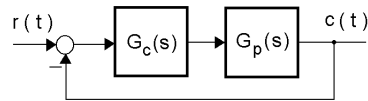
- Mamy częstotliwościową charakterystykę sterowanego obiektu (tabela 1). Taki **nieparametryczny** model tego obiektu pozyskano, przeprowadzając odpowiedni eksperyment pomiarowy.

Tabela 1.

Częstotliwościowe charakterystyki obiektu regulacji

$\omega[\text{rad} \cdot \text{s}^{-1}]$	$ G_p(j\omega) $	$\arg G_p(j\omega)$
1.193	2.6407	-100°
1.404	2.2441	-110°
1.642	1.8872	-120°
2.209	1.2988	-140°
2.919	0.8691	-160°
3.788	0.5729	-180°
4.823	0.3780	-200°
7.332	0.1753	-240°
9.492	0.1071	-270°

- Obiekt ten sterowany jest w układzie zamkniętym za pomocą regulatora proporcjonalnego $G_c(s) = k_c$ (rys. 11). Dobierz wzmocnienie k_c tego regulatora, zapewniające temu układowi zapas wzmocnienia $\Delta_g \geq 12\text{dB}$ oraz zapas fazy $\Delta_p \geq 60^\circ$.



Rysunek 11: Strukturalny schemat układu regulacji

- Zauważmy, że mamy tu do czynienia z **jednym** stopniem swobody regulatora i **podwójnym** wymaganiem, dotyczącym zapasów stabilności.
- Zakładając spełnienie warunku dotyczącego zapasu fazy, otrzymujemy $k_c = k_c^p$, gdzie

$$k_c^p = \frac{1}{|G_p(j\omega)|_{\omega=1.642 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}} = 0.5299.$$

Zachodzi bowiem (zob. tabela 1):

$$\arg G_p(j\omega)|_{\omega=1.642 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}} = \Delta_p - 180^\circ = -120^\circ.$$

- Wzmocnieniu k_c^p odpowiada zapas wzmocnienia

$$\Delta_g(k_c^p) = 20 \log \left(\frac{1}{|k_c^p G_p(j\omega)|_{\omega=3.788 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}} \right) = 10.36 \text{ dB}.$$

Z tabeli 1 wynika bowiem, iż

$$\arg G_p(j\omega)|_{\omega=3.788 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}} = -180^\circ.$$

- Układ z regulatorem proporcjonalnym o wzmocnieniu k_c^p **nie spełnia** zatem stawianych wymagań.
- Rozważmy teraz warunek, dotyczący zapasu wzmocnienia projektowanego układu. Na podstawie danych z tabeli 1 otrzymujemy wzmocnienie $k_c = k_c^g$ regulatora, gdzie

$$k_c^g = \frac{10^{-12/20}}{|G_p(j\omega)|_{\omega=3.788 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}} = 0.43849.$$

- Aby określić zapas fazy $\Delta_p(k_c^g)$ odpowiadający takiemu wzmocnieniu k_c^g , należy wyznaczyć pulsację odcięcia ω_{gc} amplitudowej charakterystyki transmitancji

$$k_c^g G_p(s)$$

układu otwartego z tak nastawionym regulatorem.

- Dla pulsacji ω_{gc} zachodzi

$$|G_p(j\omega_{gc})| = \frac{1}{k_c^g} = 2.2806.$$

Z tabeli 1 odczytujemy, że $\omega_{gc} \approx 1.404 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$, czemu odpowiada zapas fazy

$$\Delta_p(k_c^g) \approx 180^\circ + \arg G_p(j\omega_{gc}) = 70^\circ.$$

- Proporcjonalny regulator o wzmocnieniu k_c^g **spełnia** zatem warunki zadania.
- Zauważmy, że dokonano syntezy regulatora, opierając się tylko na wynikach pomiaru widmowych charakterystyk modelu regulowanego obiektu. Model parametryczny tego obiektu (transmitancja operatorowa) nie był tu zatem niezbędny. W uzupełnieniu przykładu możemy zdradzić, że

$$G_p(s) = \frac{6e^{-0.2s}}{(1 + 0.4s)(1 + 1.5s)}.$$

Jest to zatem obiekt z **opóźnieniem**, które w metodzie linii pierwiastkowych należałoby aproksymować odpowiednią funkcją wymierną.

METODY CZĘSTOTLIWOŚCIOWE – REGULATORY DYNAMICZNE

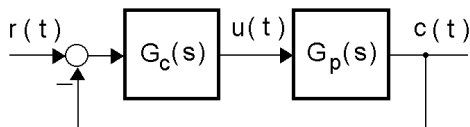
REGULATOR PRZYSPIESZAJĄCY FAZĘ *lead*

- Układ regulacji (rys. 12) składa się z obiektu o transmitancji $G_p(s)$ oraz regulatora przyspieszającego fazę (*lead*)

$$G_c(s) = k_c \cdot \frac{1 + T_z s}{1 + T_p s}$$

gdzie

$$k_c > 0 \quad \text{oraz} \quad 0 \leq T_p < T_z.$$



Rysunek 12: Strukturalny schemat układu regulacji

- Rozważymy reguły doboru parametrów k_c , T_p i T_z transmitancji regulatora, wynikające z wymagań projektowych dotyczących przede wszystkim **stabilności** układu zamkniętego oraz **szybkości** regulacji.

- Zachodzi

$$|G_c(j\omega)| = k_c \cdot \sqrt{\frac{1 + T_z^2\omega^2}{1 + T_p^2\omega^2}}$$

oraz

$$\arg G_c(j\omega) = \arctan\left(\frac{(T_z - T_p)\omega}{1 + T_p T_z \omega^2}\right) > 0.$$

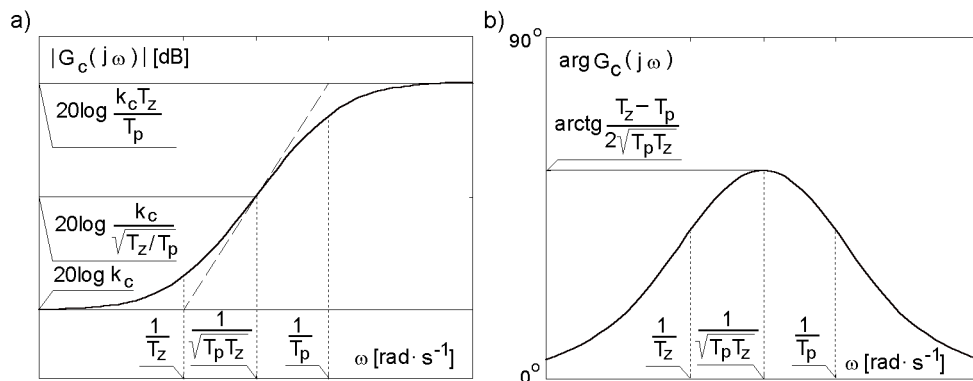
- Charakterystyka fazowa $\arg G_c(j\omega)$ osiąga maksimum dla pulsacji

$$\omega_m = \sqrt{T_p T_z}$$

przy czym

$$\arg G_c(j\omega_m) = \arctan\left(\frac{T_z - T_p}{2\sqrt{T_p T_z}}\right).$$

- Przykładowy przebieg rozważanych charakterystyk pokazano na rys. 13a,b.



Rysunek 13: Częstotliwościowe charakterystyki transmitancji $G_c(s)$ regulatora *lead*.

- Wprowadzając oznaczenie

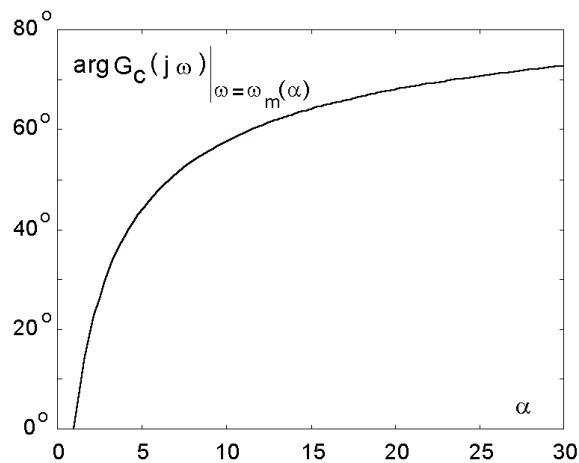
$$\alpha = \frac{T_z}{T_p}, \quad \alpha > 1$$

otrzymujemy:

$$\omega_m = \frac{\sqrt{\alpha}}{T_z} = \frac{1}{T_p \sqrt{\alpha}}$$

oraz

$$\arg G_c(j\omega_m) = \arctan \left(\frac{\alpha - 1}{2\sqrt{\alpha}} \right).$$



Rysunek 14: Maksymalny kąt fazowy transmitancji $G_c(s)$ regulatora *lead*.

- Minimalna wartość parametru α , przy której możliwe jest uzyskanie danego przesunięcia fazy ϑ_{lead} , wynosi

$$\alpha_{\vartheta} = \frac{1 + \sin \vartheta_{lead}}{1 - \sin \vartheta_{lead}}, \quad 0 < \vartheta_{lead} < 90^\circ.$$

- Ponadto mamy użyteczne formuły:

$$\begin{aligned}\sin \vartheta_{lead} &= \frac{\alpha_\vartheta - 1}{\alpha_\vartheta + 1} \\ \cos \vartheta_{lead} &= \frac{2\sqrt{\alpha_\vartheta}}{\alpha_\vartheta + 1} \\ \sqrt{\alpha_\vartheta} &= \frac{1 + \sin \vartheta_{lead}}{\cos \vartheta_{lead}} \\ &= \frac{\cos \vartheta_{lead}}{1 - \sin \vartheta_{lead}}.\end{aligned}$$

- Wymagania dotyczące **stabilności** i **szybkości** układu zamkniętego specyfikuje się, podając parę

$$(\Delta_p, \omega_{gc})$$

gdzie Δ_p oznacza **zapas fazy**, zaś ω_{gc} jest **pulsacją odcięcia amplitudowej charakterystyki transmancji układu otwartego** $G_c(s)G_p(s)$.

- Zachodzi zatem:

$$\begin{aligned}|G_c(j\omega_{gc})G_p(j\omega_{gc})| &= 1 \\ \arg(G_c(j\omega_{gc})G_p(j\omega_{gc})) &= \Delta_p - 180^\circ.\end{aligned}$$

- Wzory te zapisać można w równoważnej postaci

$$1 + j\omega_{gc}T_z = \frac{1 + j\omega_{gc}T_p}{k_c|G_p(j\omega_{gc})|} \cdot e^{j\vartheta_{lead}^p}$$

gdzie

$$\vartheta_{lead}^p = \arg G_c(j\omega_{gc}) = \Delta_p - \arg G_p(j\omega_{gc}) - 180^\circ.$$

- Przy spełnieniu nierównościowych warunków niezbędności i wystarczalności regulatora forsującego fazę

$$0^\circ < \vartheta_{lead}^p < 90^\circ$$

otrzymujemy następujące formuły, w których wzmocnienie $k_c > 0$ regulatora pełni rolę swobodnego parametru:

$$\begin{aligned} T_p(k_c) &= \frac{\cos \vartheta_{lead}^p - k_c |G_p(j\omega_{gc})|}{\omega_{gc} \sin \vartheta_{lead}^p} \\ T_z(k_c) &= \frac{\sin \vartheta_{lead}^p + \omega_{gc} T_p(k_c) \cos \vartheta_{lead}^p}{k_c \omega_{gc} |G_p(j\omega_{gc})|} \\ &= \frac{1 - k_c |G_p(j\omega_{gc})| \cos \vartheta_{lead}^p}{k_c \omega_{gc} |G_p(j\omega_{gc})| \sin \vartheta_{lead}^p}. \end{aligned}$$

- Oczekując stabilnego regulatora, a zatem kładąc $T_p(k_c) \geq 0$, uzyskujemy ograniczenie

$$k_c \leq \frac{\cos \vartheta_{lead}^p}{|G_p(j\omega_{gc})|}.$$

Jeżeli nierówność ta jest spełniona, mamy $T_z(k_c) > 0$.

- Przy założonej parze wskaźników jakości regulacji (Δ_p, ω_{gc}) swobodny parametr k_c regulatora umożliwia, do pewnego stopnia, kształtowanie sterującego sygnału $u(t)$. W przypadku jednostkowego pobudzenia $r(t) = 1(t)$ oraz obiektu opisanego ściśle właściwą transmitancją $G_p(s)$ początkowa wartość $u_0 = u(0)$ tego sygnału wynosi

$$u_0 = k_c \cdot \frac{T_z}{T_p}.$$

Zatem, przyjęcie wymagania

$$u_0 \leq u_{0\max}$$

w którym $u_{0\max}$ oznacza dopuszczalną początkową wartość sygnału sterującego $u(t)$, prowadzi do następującego ograniczenia na parametr k_c (przy $u_{0\max} > \frac{1}{|G_p(j\omega_{gc})| \cos \vartheta_{lead}^p}$)

$$0 < k_c \leq \frac{u_{0\max} |G_p(j\omega_{gc})| \cos \vartheta_{lead}^p - 1}{|G_p(j\omega_{gc})| (u_{0\max} |G_p(j\omega_{gc})| - \cos \vartheta_{lead}^p)}.$$

- Ponieważ

$$G_c(s)|_{s=0} = k_c$$

zatem parametr k_c można też wyznaczyć na podstawie wymagań odnośnie statycznej dokładności regulacji (wymagania takie formułuje się, ustalając na przykład żadaną wartość współczynnika wzmocnienia prędkościowego lub przyspieszeniowego rozważanego układu).

- Rozważmy regulator o parametrach $k_{c\vartheta}^p$, $T_{p\vartheta}^p$ oraz $T_{z\vartheta}^p$, odpowiadających minimalnej wartości α_{ϑ}^p parametru α :

$$\alpha_{\vartheta}^p = (1 + \sin \vartheta_{lead}^p) / (1 - \sin \vartheta_{lead}^p), \quad 0 < \vartheta_{lead}^p < 90^\circ$$

przy której układ charakteryzuje para wskaźników

$$(\Delta_p, \omega_{gc} = \omega_m).$$

Mamy:

$$\begin{aligned} k_{c\vartheta}^p &= \frac{1}{|G_p(j\omega_{gc})| \sqrt{\alpha_{\vartheta}^p}} \\ &= \frac{\cos \vartheta_{lead}^p}{|G_p(j\omega_{gc})| (1 + \sin \vartheta_{lead}^p)} \\ &= \frac{1 - \sin \vartheta_{lead}^p}{|G_p(j\omega_{gc})| \cos \vartheta_{lead}^p} \end{aligned}$$

$$T_{p\vartheta}^p = \frac{1}{\omega_{gc} \sqrt{\alpha_{\vartheta}^p}} = \frac{\cos \vartheta_{lead}^p}{\omega_{gc} (1 + \sin \vartheta_{lead}^p)} = \frac{1 - \sin \vartheta_{lead}^p}{\omega_{gc} \cos \vartheta_{lead}^p}$$

$$T_{z\vartheta}^p = \frac{\sqrt{\alpha_{\vartheta}^p}}{\omega_{gc}} = \frac{\cos \vartheta_{lead}^p}{\omega_{gc} (1 - \sin \vartheta_{lead}^p)} = \frac{1 + \sin \vartheta_{lead}^p}{\omega_{gc} \cos \vartheta_{lead}^p}$$

$$\begin{aligned} u_{0\vartheta}^p &= \frac{\sqrt{\alpha_{\vartheta}^p}}{|G_p(j\omega_{gc})|} \\ &= \frac{\cos \vartheta_{lead}^p}{|G_p(j\omega_{gc})| (1 - \sin \vartheta_{lead}^p)} \\ &= \frac{1 + \sin \vartheta_{lead}^p}{|G_p(j\omega_{gc})| \cos \vartheta_{lead}^p}. \end{aligned}$$

- Maksymalnej dopuszczalnej wartości swobodnego parametru k_c przyporządkowana jest idealizowana (nierealizowalna) postać transmitancji regulatora PD

$$G_{PD}(s) = k_{PD}^p (1 + sT_d^p)$$

gdzie:

$$k_{PD}^p = \frac{\cos \vartheta_{lead}^p}{|G_p(j\omega_{gc})|} \quad \text{oraz} \quad T_d^p = \frac{\tan \vartheta_{lead}^p}{\omega_{gc}}.$$

Transmitancji $G_{PD}(s)$ odpowiada (oczywiście) nieograniczona początkowa wartość u_0 sygnału sterującego $u(t)$ przy jednostkowym pobudzeniu.

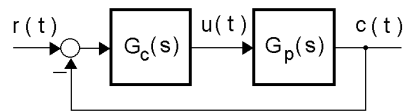
- Analogiczne wyniki uzyskać można dla pary wskaźników (Δ_g, ω_{pc}) (zob. skrypt i *przykład 9*).

Przykład 8

- Obiekt o modelu

$$G_p(s) = \frac{1}{s(1 + 0.1s)(1 + 0.05s)(1 + 0.02s)}$$

sterowany jest za pomocą regulatora $G_c(s)$ w układzie pokazanym na rys. 15.



Rysunek 15: Strukturalny schemat układu regulacji

- Wyznacz wzmacnienie regulatora proporcjonalnego, przy którym układ regulacji charakteryzuje się zapasem fazy $\Delta_p = 60^\circ$.
- Wyznacz parametry regulatora forsującego fazę, dla których:
 - zapas fazy układu regulacji wynosi $\Delta_p = 60^\circ$,
 - pulsacja odcięcia ω_{gc}^l amplitudowej charakterystyki układu otwartego przyjmuje wartość dwukrotnie większą w stosunku do odpowiedniej pulsacji odcięcia ω_{gc}^P układu z punktu **a)**,
 - początkowa wartość u_0^l sygnału sterującego $u(t)$ w przypadku jednostkowego skokowego pobudzenia $r(t) = 1(t)$ nie przekracza $u_0^l \leq 15$.

Dla każdego układu regulacji oszacuj zapas wzmocnienia oraz wzmocnienie prędkościowe.

a) Regulator proporcjonalny

- Wzmocnienie k_c regulatora obliczamy ze wzoru

$$k_c = k_c^P = \frac{1}{|G_p(j\omega_{gc}^P)|}$$

gdzie ω_{gc}^P oznacza pulsację odcięcia amplitudowej charakterystyki transmitancji otwartego układu regulacji. Pulsacja ta spełnia następujące równanie

$$\arg G_p(j\omega_{gc}^P) = \Delta_p - 180^\circ = -120^\circ.$$

Korzystając z częstotliwościowych charakterystyk transmitancji sterowanego obiektu (MATLAB!), znajdujemy:

$$\omega_{gc}^P = 3.1456 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{oraz} \quad |G_p(j\omega_{gc}^P)| = 0.29898.$$

↓

$$k_c^P = 3.3447.$$

- Początkowa wartość u_0^P sygnału sterującego $u(t)$ przy jednostkowym skokowym pobudzeniu $r(t)$ wynosi zatem

$$u_0^P = 3.3447.$$

- Tak zaprojektowany układ regulacji charakteryzuje się zapasem modułu

$$\Delta_g = \Delta_g^P = 15.40 \text{ dB}$$

przy pulsacji odcięcia fazowej charakterystyki transmitancji układu otwartego

$$\omega_{pc} = \omega_{pc}^P = 11.18 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

oraz prędkościowym wzmocnieniem

$$k_v = k_v^P = 3.3447 \text{ s}^{-1}.$$

b) Regulator forsujący fazę

- Pulsacja odcięcia amplitudowej charakterystyki transmitancji układu otwartego ze regulatorem *lead*

$$G_c(s) = k_c \cdot \frac{1 + T_z s}{1 + T_p s}, \quad k_c > 0, 0 \leq T_p < T_z$$

wynosi

$$\omega_{gc} = \omega_{gc}^l = 2\omega_{gc}^P = 6.2912 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Pulsacji tej odpowiada:

$$|G_p(j\omega_{gc}^l)| = 0.12734 \quad \text{oraz} \quad \arg G_p(j\omega_{gc}^l) = -146.81^\circ.$$

- Na tej podstawie obliczamy kąt fazowy

$$\vartheta_{lead} = \arg G_c(j\omega_{gc}^l) = \Delta_p - \arg G_p(j\omega_{gc}^l) - 180^\circ = 26.81^\circ.$$

- Sprawdźmy, czy wymagania co do sygnału sterującego spełnić można, biorąc **minimalną** dopuszczalną wartość α_ϑ ilorazu $\alpha = T_z/T_p$

$$\alpha_\vartheta = \frac{1 + \sin \vartheta_{lead}}{1 - \sin \vartheta_{lead}} = 2.64321.$$

Początkowa wartość u_0^l sygnału sterującego $u(t)$ przy jednostkowym skokowym pobudzeniu wynosi w tym przypadku

$$u_0^l = \frac{\sqrt{\alpha_\vartheta}}{|G_p(j\omega_{gc}^l)|} = 12.7676 < 15$$

co oznacza, iż nie naruszono przyjętego ograniczenia.

- Parametry regulatora *lead* wyznaczamy w następujący sposób:

$$k_c = \frac{1}{|G_p(j\omega_{gc})|\sqrt{\alpha_\vartheta}} = 4.83$$

$$T_p = \frac{1}{\omega_{gc}\sqrt{\alpha_\vartheta}} = 0.0978 \text{ s}$$

$$T_z = \frac{\sqrt{\alpha_\vartheta}}{\omega_{gc}} = 0.2584 \text{ s.}$$

- Układ regulacji z takim regulatorem charakteryzuje się zapasem modułu

$$\Delta_g = \Delta_g^l = 10.2 \text{ dB}$$

przy pulsacji odcięcia fazowej charakterystyki transmisji układu otwartego

$$\omega_{pc} = \omega_{pc}^l = 14.99 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Prędkościowe wzmocnienie tego układu wynosi

$$k_v = k_v^l = 4.8303 \text{ s}^{-1}.$$

Przykład 9

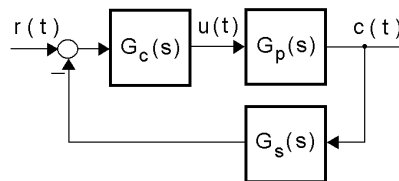
- Rozważmy układ regulacji o strukturalnym schemacie przedstawionym na rys. 16, przy czym transmitancja obiektu dana jest wzorem

$$G_p(s) = \frac{1 - 0.13s}{s(1 + 0.4s)^2(1 + 0.06s)}$$

zaś transmitancja

$$G_s(s) = \frac{e^{-0.08s}}{1 + 0.02s}$$

opisuje czujnik pomiarowy.



Rysunek 16: Strukturalny schemat układu regulacji

- W układzie zastosowano regulator przyspieszający fazę

$$G_c(s) = k_c \cdot \frac{1 + T_z s}{1 + T_p s}, \quad k_c > 0, 0 \leq T_p < T_z.$$

Wyznacz parametry tej transmitancji, zapewniające układowi regulacji zapas wzmocnienia $\Delta_g = 10$ dB przy założeniu, że pulsacja odcięcia fazowej charakterystyki układu otwartego wynosi $\omega_{pc} = 3.0 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

- Od regulatora oczekuje się ponadto, iż odpowiadający mu współczynnik prędkościowego wzmocnienia k_v osiągnie maksymalną dopuszczalną wartość przy następującym ograniczeniu na początkową wartość u_0 sygnału sterującego $u(t)$, występującego przy skokowej wielkości zadającej $r(t) = 1(t)$: $u_0 \leq u_{0\max} = 20$. Oszacuj zapas fazy rozważanego układu.
- Na podstawie częstotliwościowej charakterystyki transmitancji

$$G_{ps}(s) = G_p(s)G_s(s)$$

czyli transmitancji szeregowego połączenia sterowanego obiektu oraz pomiarowego czujnika, wyznaczamy:

$$|G_{ps}(j\omega_{pc})| = 0.14406 \quad \text{oraz} \quad \arg G_{ps}(j\omega_{pc}) = -239.083^\circ.$$

- Kąt $\vartheta_{lead} = \arg G_c(j\omega_{pc})$ wynosi zatem

$$\vartheta_{lead} = \arg G_c(j\omega_{pc}) = -\arg G_{ps}(j\omega_{pc}) - 180^\circ = 59.083^\circ.$$

Ponieważ zachodzi

$$u_{0\max} > \frac{1}{10^{\Delta_g/20} |G_{ps}(j\omega_{pc})| \cos \vartheta_{lead}} = 4.2725$$

przeto przyjmując $u_0 = u_{0\max}$, co zapewnia maksymalny osiągalny współczynnik prędkościowego wzmocnienia k_v , parametr k_c regulatora wyznaczamy ze wzoru

$$\begin{aligned} k_c &= \frac{10^{\Delta_g/20} u_{0\max} |G_{ps}(j\omega_{pc})| \cos \vartheta_{lead} - 1}{10^{\Delta_g/20} |G_{ps}(j\omega_{pc})| (10^{\Delta_g/20} u_{0\max} |G_{ps}(j\omega_{pc})| - \cos \vartheta_{lead})} \\ &= 0.9399. \end{aligned}$$

- Na tej podstawie obliczamy pozostałe parametry regulatora:

$$T_p = \frac{\cos \vartheta_{lead} - 10^{\Delta_g/20} k_c |G_{ps}(j\omega_{pc})|}{\omega_{pc} \sin \vartheta_{lead}} = 0.03326 \text{ s}$$

$$T_z = \frac{\sin \vartheta_{lead} + \omega_{pc} T_p \cos \vartheta_{lead}}{10^{\Delta_g/20} k_c \omega_{pc} |G_{ps}(j\omega_{pc})|} = 0.70779 \text{ s.}$$

- Uzyskany układ posiada prędkościowe wzmocnienie

$$k_v = 0.9399 \text{ s}^{-1}$$

oraz zapas fazy

$$\Delta_p = 63.26^\circ$$

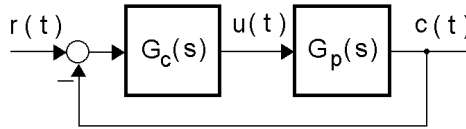
przy pulsacji odcięcia amplitudowej charakterystyki układu otwartego

$$\omega_{gc} = 0.998 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

REGULATOR OPÓŹNIAJĄCY FAZĘ *lag*

- Układ regulacji (rys. 17) składa się z obiektu opisanego operatorową transmitancją $G_p(s)$ oraz regulatora opóźniającego fazę (*lag*) o transmitancji

$$G_c(s) = k_c \cdot \frac{1 + T_z s}{1 + T_p s}, \quad k_c > 0, \quad 0 \leq T_z < T_p.$$



Rysunek 17: Strukturalny schemat układu regulacji

- Rozważmy własności częstotliwościowych charakterystyk transmitancji $G_c(s)$ tego regulatora. Mamy:

$$|G_c(j\omega)| = k_c \cdot \sqrt{\frac{1 + T_z^2 \omega^2}{1 + T_p^2 \omega^2}}$$

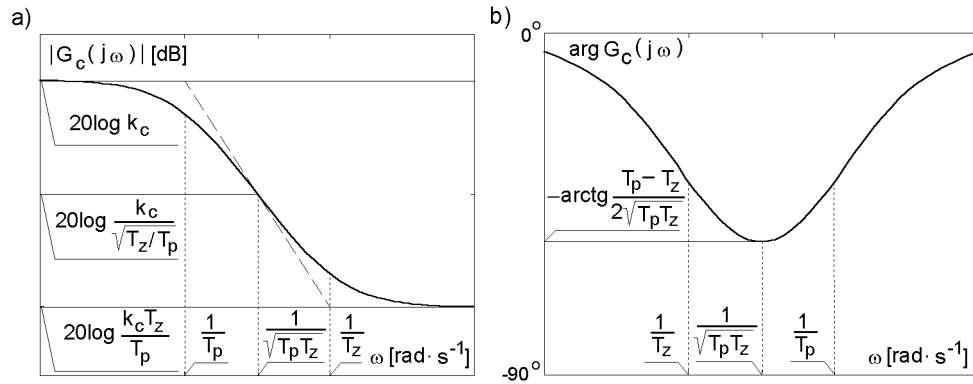
$$\arg G_c(j\omega) = -\arctan\left(\frac{(T_p - T_z)\omega}{1 + T_p T_z \omega^2}\right) < 0.$$

Fazowa charakterystyka $\arg G_c(j\omega)$ osiąga minimum dla pulsacji

$$\omega_m = \frac{1}{\sqrt{T_p T_z}}$$

przy czym

$$\arg G_c(j\omega_m) = -\arctan\left(\frac{T_p - T_z}{2\sqrt{T_p T_z}}\right).$$



Rysunek 18: Częstotliwościowe charakterystyki transmitancji $G_c(s)$ regulatora *lag*.

- Podamy reguły doboru parametrów k_c , T_p oraz T_z transmitancji regulatora *lag*, wynikające przede wszystkim z wymagań dotyczących **stabilności** oraz **statycznej dokładności** regulacji.
- Ponieważ

$$G_c(s)|_{s=0} = k_c$$

zatem parametr k_c regulatora można wyznaczać bezpośrednio na podstawie żądanej dokładności.

- Wymagania, odnoszące się do zapasu stabilności oraz – w pewnym stopniu – do szybkości regulacji, wyrażane są w postaci par wskaźników

$$(\Delta_g, \omega_{pc}) \quad \text{lub} \quad (\Delta_p, \omega_{gc})$$

gdzie Δ_g oznacza zapas wzmocnienia, Δ_p jest zapasem fazy, zaś ω_{pc} oraz ω_{gc} oznaczają pulsacje odcięcia czę-

stotliwościowych charakterystyk transmitancji układu otwartego $G_c(s)G_p(s)$, odpowiednio: charakterystyki fazowej oraz amplitudowej.

- Dla pary wskaźników (Δ_p, ω_{gc}) wprowadzamy następujące oznaczenie przyczynku fazowego wprowadzanego do fazy układu otwartego dla pulsacji ω_{gc} przez regulator opóźniający fazę:

$$\vartheta_{lag}^p = \arg G_c(j\omega_{gc}) = \Delta_p - \arg G_p(j\omega_{gc}) - 180^\circ.$$

- Zakładając, że spełnione są nierównościowe warunki wystarczalności i niezbędności regulatora opóźniającego fazę

$$-90^\circ < \vartheta_{lag}^p < 0^\circ$$

uzyskujemy formuły, wiążące parametry T_p oraz T_z transmitancji $G_c(s)$ rozważanego regulatora z wartością statycznego wzmocnienia k_c (parametr swobodny):

$$\begin{aligned} T_p(k_c) &= \frac{\cos \vartheta_{lag}^p - k_c |G_p(j\omega_{gc})|}{\omega_{gc} \sin \vartheta_{lag}^p} \\ T_z(k_c) &= \frac{\sin \vartheta_{lag}^p + \omega_{gc} T_p(k_c) \cos \vartheta_{lag}^p}{k_c \omega_{gc} |G_p(j\omega_{gc})|} \\ &= \frac{1 - k_c |G_p(j\omega_{gc})| \cos \vartheta_{lag}^p}{k_c \omega_{gc} |G_p(j\omega_{gc})| \sin \vartheta_{lag}^p}. \end{aligned}$$

- Na wzmocnienie k_c nałożone jest ograniczenie

$$0 < \frac{1}{|G_p(j\omega_{gc})| \cos \vartheta_{lag}^p} \leq k_c$$

wynikające z postulatu, aby $T_z(k_c) \geq 0$.

- Na tej podstawie wnioskujemy, że tym samym spełnione jest też żądanie stabilności regulatora *lag*

$$T_p(k_c) > 0.$$

- Zakładając, że $G_p(s)$ jest ściśle właściwą funkcją wymierną, uzyskujemy następującą ocenę u_0 początkowej wartości sygnału sterującego $u(t)$ przy jednostkowym pobudzeniu $r(t) = 1(t)$:

$$u_0 = k_c \cdot \frac{T_z}{T_p}.$$

Dla (Δ_p, ω_{gc}) przy

$$k_c \geq \frac{1}{|G_p(j\omega_{gc})| \cos \vartheta_{lag}^g}$$

zachodzi

$$u_0(k_c) = \frac{1 - k_c |G_p(j\omega_{gc})| \cos \vartheta_{lag}^p}{|G_p(j\omega_{gc})| (\cos \vartheta_{lag}^p - k_c |G_p(j\omega_{gc})|)}.$$

Dla wszystkich dopuszczalnych wartości parametru k_c początkowa wartość u_0 sygnału sterującego podlega przeto następującemu ograniczeniu

$$0 \leq u_0 < \frac{\cos \vartheta_{lag}^p}{|G_p(j\omega_{gc})|} \quad \text{dla } (\Delta_p, \omega_{gc}).$$

W przeciwieństwie do regulatora przyspieszającego fazę, wartość ta jest **ograniczona od góry**.

- Analogiczne wyniki mamy dla pary (Δ_g, ω_{pc}) (skrypt).

Przyjmując, że

$$0 \leq u_0 \leq u_{0\max}$$

gdzie $u_{0\max}$ oznacza dopuszczalną początkową wartość sygnału sterującego $u(t)$ przy jednostkowym skokowym sygnale zadającym, dla (Δ_p, ω_{gc}) oraz dla

$$0 \leq u_{0\max} < \frac{\cos \vartheta_{lag}^p}{|G_p(j\omega_{gc})|}$$

uzyskujemy ograniczenie na swobodny parametr k_c :

$$\frac{1}{|G_p(j\omega_{gc})| \cos \vartheta_{lag}^g} \leq k_c \leq \frac{u_{0\max} |G_p(j\omega_{gc})| \cos \vartheta_{lag}^p - 1}{|G_p(j\omega_{gc})| (u_{0\max} |G_p(j\omega_{gc})| - \cos \vartheta_{lag}^p)}.$$

- Pulsacje odcięcia ω_{gc} oraz ω_{pc} oszacować można na podstawie wymagań odnośnie **szybkości** regulacji.
- Porównajmy warunki, jakie muszą spełniać pulsacje odcięcia w przypadku układu z regulatorem:
 - ★ przyspieszającym fazę *lead* (pulsacje ω_{gc}^{lead} i ω_{pc}^{lead})
 - ★ opóźniającym fazę *lag* (pulsacje ω_{gc}^{lag} i ω_{pc}^{lag}).

Pulsacje odcięcia amplitudowej charakterystyki transmittancji układu otwartego dla zadanego zapasu fazy Δ_p :

★ regulator *lead*

$$\Delta_p - 270^\circ < \arg G_p(j\omega_{gc}^{lead}) < \Delta_p - 180^\circ$$

★ regulator *lag*

$$\Delta_p - 180^\circ < \arg G_p(j\omega_{gc}^{lag}) < \Delta_p - 90^\circ.$$

Pulsacje odcięcia fazowej charakterystyki transmitancji układu otwartego:

★ regulator *lead*

$$-270^\circ < \arg G_p(j\omega_{pc}^{lead}) < -180^\circ$$

★ regulator *lag*

$$-180^\circ < \arg G_p(j\omega_{pc}^{lag}) < -90^\circ.$$

- Dla pulsacji odcięcia ω_{gc}^{lead} oraz ω_{gc}^{lag} , przy ustalonym zapasie fazy Δ_p , zachodzi zatem

$$\arg G_p(j\omega_{gc}^{lead}) < \arg G_p(j\omega_{gc}^{lag}).$$

- Z kolei dla pulsacji odcięcia ω_{pc}^{lead} oraz ω_{pc}^{lag} mamy

$$\arg G_p(j\omega_{pc}^{lead}) < \arg G_p(j\omega_{pc}^{lag}).$$

- Gdy fazowa charakterystyka $\arg G_p(j\omega)$ jest funkcją malejącą (przynajmniej lokalnie), spełnione są nierówności:

$$\begin{aligned} \omega_{gc}^{lag} &< \omega_{gc}^{lead} \\ \omega_{pc}^{lag} &< \omega_{pc}^{lead}. \end{aligned}$$

- Gdy wymagania dotyczą stabilności oraz dokładności, wtedy kąty ϑ_{lag}^g oraz ϑ_{lag}^p należy traktować jako stopnie swobody (odpowiednie pulsacje odcięcia przyjmują teraz wartości wynikowe). Gdy obowiązują nierówności $-90^\circ < \vartheta_{lag}^g < 0^\circ$ oraz $-90^\circ < \vartheta_{lag}^p < 0^\circ$, otrzymujemy formuły przydatne przy syntezie regulatora:

$$\begin{aligned} \arg G_p(j\omega_{pc}) &= -\vartheta_{lag}^g - 180^\circ \\ \arg G_p(j\omega_{gc}) &= \Delta_p - \vartheta_{lag}^p - 180^\circ. \end{aligned}$$

- Rozważmy uproszczoną metodę syntezy regulatora opóźniającego fazę. W tym celu przyjmujemy, że

$$\bar{\vartheta}_{lag}^p \leq \vartheta_{lag}^p < 0^\circ$$

gdzie $\bar{\vartheta}_{lag}^p$ jest pewnym oszacowaniem od dołu kąta fazowego $\arg G_c(j\omega_{gc})$. Zakładając dostatecznie małą wartość $|\bar{\vartheta}_{lag}^p|$, możemy zapisać, że

$$\arg G_p(j\tilde{\omega}_{gc}) = \Delta_p - \bar{\vartheta}_{lag}^p - 180^\circ$$

skąd, dla zadanego zapasu fazy Δ_p , wyznaczamy **przybliżoną** wartość $\tilde{\omega}_{gc}$ pulsacji odcięcia amplitudowej charakterystyki otwartego układu regulacji.

Następnie, aby zapewnić niewielki udział częstotliwościowej charakterystyki transmitancji regulatora w formowaniu charakterystyki transmitancji otwartego układu regulacji w otoczeniu **faktycznej** pulsacji odcięcia ω_{gc} tej charakterystyki, pulsacje

$$\omega_p = \frac{1}{T_p} \quad \text{oraz} \quad \omega_z = \frac{1}{T_z}$$

determinujące poszukiwane parametry T_p oraz T_z regulatora, muszą przyjmować wartości **znacznie mniejsze** od ω_{gc} .

Prosta reguła wyznaczania wartości pulsacji ω_z oparta jest na żądaniu zachowania dostatecznie dużego – na przykład **dekadowego** – odstepu ω_z od $\tilde{\omega}_{gc}$; w takim przypadku ('reguła 0.1') zakłada się zatem, że

$$\omega_z = 0.1 \cdot \tilde{\omega}_{gc}.$$

Przykład 10

- Dany jest model nieminimalnofazowego obiektu

$$G_p(s) = \frac{1.2(1 - 0.1s)}{s(1 + 0.4s)(1 + 0.1s)^2}.$$

- Należy wyznaczyć parametry regulatora opóźniającego fazę *lag*

$$G_c(s) = k_c \cdot \frac{1 + T_z s}{1 + T_p s}, \quad k_c > 0, \quad 0 \leq T_z < T_p$$

który zapewni zapas fazy $\Delta_p = 40^\circ$ (przy pulsacji odcięcia amplitudowej charakterystyki transmitancji układu otwartego $\omega_{gc} = 0.9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$) oraz ustalony błąd śledzenia sygnału prędkościowego nie większy niż $e(\infty) = 0.05$.

- Wymagane wzmocnienie prędkościowe k_v ma wartość

$$k_v = \frac{1}{e(\infty)} = 20.$$

Na tej podstawie obliczamy wzmocnienie regulatora

$$k_c = \frac{k_v}{\lim_{s \rightarrow 0} sG_p(s)} = 16.6667.$$

- Pulsacji odcięcia ω_{gc} odpowiadają następujące wartości charakterystyk częstotliwościowych sterowanego obiektu:

$$\begin{aligned} |G_p(j\omega_{gc})| &= 1.2495 \\ \arg G_p(j\omega_{gc}) &= -125.227^\circ. \end{aligned}$$

- Kąt fazowy

$$\vartheta_{lag} = \arg G_c(j\omega_{gc}) = \Delta_p - \arg G_p(j\omega_{gc}) - 180^\circ = -14.773^\circ$$

spełnia nierówności $-90^\circ < \vartheta_{lag} < 0^\circ$, co pozwala na wyznaczenie pozostałych parametrów transmitancji $G_c(s)$:

$$T_p = \frac{\cos \vartheta_{lag} - k_c |G_p(j\omega_{gc})|}{\omega_{gc} \sin \vartheta_{lag}} = 86.53 \text{ s}$$

$$T_z = \frac{1 - k_c |G_p(j\omega_{gc})| \cos \vartheta_{lag}}{k_c \omega_{gc} |G_p(j\omega_{gc})| \sin \vartheta_{lag}} = 4.004 \text{ s.}$$

- Początkowa wartość sygnału sterującego, odpowiadającego jednostkowemu pobudzeniu skokowemu, równa się

$$u_0 = k_c \cdot \frac{T_z}{T_p} = 0.7713.$$

Analizując częstotliwościową charakterystykę transmitancji $G_c(s)G_p(s)$, stwierdzamy, iż tak uzyskany układ regulacji posiada zapas wzmocnienia

$$\Delta_g = 11.31 \text{ dB}$$

oraz pulsację odcięcia fazowej charakterystyki transmitancji układu otwartego

$$\omega_{pc} = 2.401 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Na podstawie częstotliwościowej charakterystyki układu zamkniętego otrzymujemy:

$$M_r = 1.47, \quad \omega_r = 0.83 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

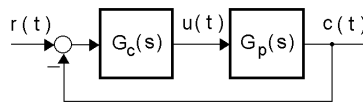
oraz

$$\omega_{3\text{dB}} = 1.76 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

REGULATOR PI

- Obiekt o operatorowej transmitancji $G_p(s)$ sterowany jest w układzie z rys. 19 za pomocą regulatora PI o transmitancji

$$G_c(s) = k_p + \frac{k_i}{s}.$$



Rysunek 19: Strukturalny schemat układu regulacji

- Podamy reguły strojenia nastaw $k_p \geq 0$ oraz $k_i \geq 0$ tego regulatora, wynikające z wymagań związanych przede wszystkim ze **stabilnością** układu zamkniętego (regulator PI podwyższa stopień astatyzmu układu, a tym samym zwiększa jego statyczną dokładność).

Zbadamy możliwość parametryzacji zbioru nastaw regulatora PI ze względu na wymagania dotyczące właśnie dokładności, a także szybkości regulacji.

- Częstotliwościowe charakterystyki transmitancji $G_c(s)$ regulatora PI mają postać:

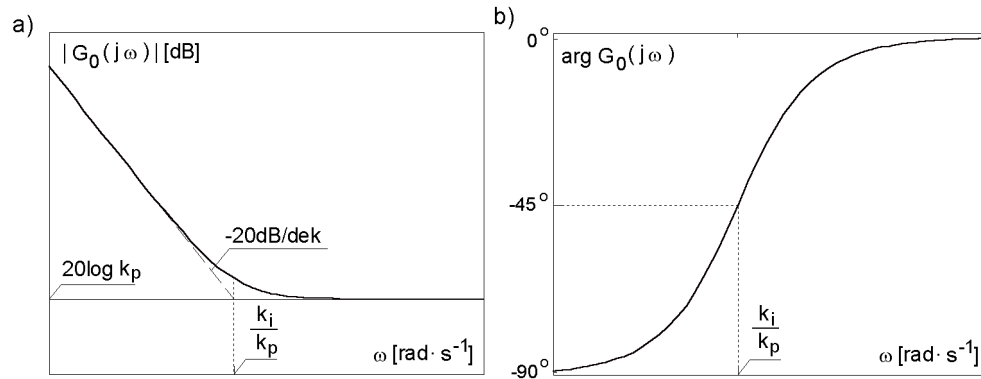
$$|G_c(j\omega)| = \sqrt{k_i^2 + k_p^2\omega^2}$$

$$\arg G_c(j\omega) = -90^\circ + \arctan\left(\frac{k_p\omega}{k_i}\right).$$

Zatem dla $k_p \geq 0$ oraz $k_i \geq 0$ mamy opóźnianie fazy

$$-90^\circ \leq \arg G_c(j\omega) \leq 0^\circ.$$

- Widmowe charakterystyki regulatora PI – rys. 20.



Rysunek 20: Częstotliwościowe charakterystyki transmitancji regulatora PI .

- Wymagania dotyczące zapasów stabilności oraz szybkości regulacji wyrażamy za pomocą par wskaźników:

$$(\Delta_g, \omega_{pc}) \quad \text{lub} \quad (\Delta_p, \omega_{gc})$$

gdzie Δ_g to zapas wzmocnienia, Δ_p jest zapasem fazy, zaś ω_{pc} oraz ω_{gc} oznaczają pulsacje odcięcia częstotliwościowych charakterystyk układu otwartego $G_c(s)G_p(s)$, odpowiednio, charakterystyki fazowej oraz amplitudowej.

- Rozważmy (przykładowo) strojenie regulatora PI dla zadanej pary (Δ_p, ω_{gc}) . Zakładamy przy tym, że kąt

$$\vartheta_{PI}^p = \arg G_c(j\omega_{gc}) = \Delta_p - \arg G_p(j\omega_{gc}) - 180^\circ$$

spełnia następujące nierówności (warunek wystarczalności oraz niezbędności regulatora PI)

$$-90^\circ \leq \vartheta_{PI}^p \leq 0^\circ.$$

- Skąd łatwo dostajemy formuły na parametry tego regulatora:

$$k_p = \frac{\cos \vartheta_{PI}^p}{|G_p(j\omega_{gc})|} \quad (11)$$

$$k_i = \frac{-\omega_{gc} \sin \vartheta_{PI}^p}{|G_p(j\omega_{gc})|}. \quad (12)$$

- Gdy projektowe wymaganie dotyczy tylko zapasu fazy, kąt ϑ_{PI}^p traktować można jako parametr procedury syntezy regulatora PI . Pulsację odcięcia ω_{gc} otrzymujemy teraz z równania

$$\arg G_p(j\omega_{gc}) = \Delta_p - \vartheta_{PI}^p - 180^\circ.$$

- Dla dostatecznie małych wartości $|\vartheta_{PI}^p|$ zależności dane wzorami (11) oraz (12) przyjmują prostszą postać:

$$k_p = \frac{1}{|G_p(j\omega_{gc})|}$$

$$k_i = -\omega_{gc} k_p \sin \vartheta_{PI}^p.$$

- Szacując wartość pulsacji ω_{gc} , przyjąć można, że

$$\omega_{gc} \approx \tilde{\omega}_{gc}$$

gdzie $\tilde{\omega}_{gc}$ jest pulsacją odcięcia amplitudowej charakterystyki obiektu, wyznaczoną z równania

$$\arg G_p(j\tilde{\omega}_{gc}) = \Delta_p - 180^\circ.$$

- Granicznymi wartościami kąta ϑ_{PI}^p przyporządkować można następujące parametry regulatora PI :

$$\vartheta_{PI}^p = \begin{cases} 0^\circ \rightarrow \text{regulator } P : & \begin{cases} k_p = \frac{1}{|G_p(j\omega_{gc})|} \\ k_i = 0 \\ \arg G_p(j\omega_{gc}) = \Delta_p - 180^\circ \end{cases} \\ -90^\circ \rightarrow \text{regulator } I : & \begin{cases} k_p = 0 \\ k_i = \frac{\omega_{gc}}{|G_p(j\omega_{gc})|} \\ \arg G_p(j\omega_{gc}) = \Delta_p - 90^\circ. \end{cases} \end{cases}$$

- Na zakończenie rozpatrzmy sytuację, w której parametr k_i regulatora PI ustalamy na podstawie wymagań dotyczących statycznej dokładności regulacji

$$k_i = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{PI}(s)$$

zaś wartość parametru k_p tego regulatora wyznaczamy w ten sposób, aby zapewnić projektowanemu układowi regulacji żądany zapas fazy Δ_p .

Pulsację odcięcia ω_{gc} otrzymujemy rozwiązując równanie

$$k_i |G_p(j\omega_{gc})| + \omega_{gc} \sin(\Delta_p - \arg G_p(j\omega_{gc}) - 180^\circ) = 0.$$

Gdy równanie to posiada rozwiązanie $\omega_{gc} > 0$, dla którego

$$\Delta_p - 180^\circ \leq \arg G_p(j\omega_{gc}) \leq \Delta_p - 90^\circ$$

wówczas parametr k_p regulatora PI dany jest wzorem

$$k_p = \frac{\cos(\Delta_p - \arg G_p(j\omega_{gc}) - 180^\circ)}{|G_p(j\omega_{gc})|}.$$

Przykład 11

- Obiekt $G_p(s)$ o charakterystykach widmowych danych w tabeli 1 sterowany jest za pomocą regulatora $G_c(s)$ w układzie zamkniętym z jednostkowym ujemnym sprzężeniem zwrotnym.

Tabela 1.

Częstotliwościowe charakterystyki sterowanego obiektu

ω [rad · s ⁻¹]	$ G_p(j\omega) $	$\arg G_p(j\omega)$
4.714	1.2472	-100°
5.776	1.0000	-114.55°
6.225	0.9115	-120°
6.666	0.8331	-125°
8.189	0.6173	-140°
10.824	0.3851	-160°
13.419	0.2555	-175°
14.433	0.2204	-180°

- Wyznacz pulsacje odcięcia fazowej oraz amplitudowej charakterystyki obiektu, odpowiednio ω_{pc}^P oraz ω_{gc}^P , a następnie oszacuj zapas wzmocnienia Δ_g^P oraz fazy Δ_p^P układu regulacji bez korekcji ($G_c(s) = 1$).
- Dobierz przykładowe parametry regulatora PI , zapewniające zapas fazy $\Delta_p^{PI} = 55^\circ$.
- Wyznacz przykładowe parametry regulatora PI , przy których zamknięty układ regulacji charakteryzuje się zapasem wzmocnienia $\Delta_g^{PI} = 12$ dB.

- d) Dla jakich wartości parametrów regulatora PI zapas fazy układu regulacji będzie wynosił $\Delta_p^{PI} = 45^\circ$, zaś pulsacja odcięcia ω_{gc}^{PI} amplitudowej charakterystyki odpowiedniego układu otwartego będzie równa $\omega_{gc}^{PI} = 1.25\omega_{gc}^P$?
- e) Oszacuj wartości nastaw regulatora PI , przy których zapas wzmocnienia układu regulacji będzie równy $\Delta_g^{PI} = 18 \text{ dB}$, zaś pulsacja odcięcia ω_{pc}^{PI} fazowej charakterystyki odpowiedniego układu otwartego będzie wynosiła $\omega_{pc}^{PI} = 0.85\omega_{pc}^P$.

- a) Z tabeli 1 odczytujemy pulsację odcięcia

$$\omega_{pc}^P = 14.433 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

fazowej charakterystyki otwartego układu regulacji bez korekcji, a następnie wyznaczamy zapas wzmocnienia Δ_g^P tego układu

$$\Delta_g^P = -20 \log(|G_p(j\omega_{pc}^P)|) = -20 \log(0.2204) = 13.135 \text{ dB}.$$

W tej samej tabeli znajdujemy wartość pulsacji odcięcia

$$\omega_{gc}^P = 5.776 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

amplitudowej charakterystyki otwartego układu regulacji bez korekcji i na tej podstawie obliczamy zapas fazy Δ_p^P tego układu

$$\Delta_p^P = 180^\circ + \arg G_p(j\omega_{gc}^P) = 180^\circ - 114.55^\circ = 65.45^\circ.$$

- Przyjmijmy następującą transmitancję regulatora PI

$$G_c(s) = k_p + \frac{k_i}{s}.$$

- b) Postawione zadanie nie ma jednoznacznego rozwiązania. Zakładając przykładową wartość swobodnego parametru

$$\vartheta_{PI}^p = -5^\circ$$

nastawy regulatora PI wyznaczamy ze wzorów:

$$k_p = \frac{\cos \vartheta_{PI}^p}{|G_p(j\omega_{gc}^{PI})|} \quad (13)$$

$$k_i = \frac{-\omega_{gc}^{PI} \sin \vartheta_{PI}^p}{|G_p(j\omega_{gc}^{PI})|} \quad (14)$$

przy czym pulsacja odcięcia ω_{gc}^{PI} amplitudowej charakterystyki otwartego układu regulacji wynika z równania

$$\arg G_p(j\omega_{gc}^{PI}) = \Delta_p^{PI} - \vartheta_{PI}^p - 180^\circ = -120^\circ.$$

Pulsację tę łatwo odczytujemy z tabeli 1

$$\omega_{gc}^{PI} = 6.225 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Parametry regulatora PI mają zatem wartość:

$$k_p = 1.093 \quad \text{oraz} \quad k_i = 0.595 \text{ s}^{-1}.$$

Zapas wzmocnienia tak uzyskanego układu wynosi

$$\Delta_g^{PI} = 11.78 \text{ dB}$$

przy pulsacji odcięcia fazowej charakterystyki odpowiedniego otwartego układu równej

$$\omega_{pc}^{PI} = 13.97 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- c) Zadanie także nie posiada jednoznacznego rozwiązania. Przyjmując przykładową wartość roboczego parametru

$$\vartheta_{PI}^g = -5^\circ$$

nastawy regulatora PI obliczamy ze wzorów:

$$k_p = \frac{10^{-\Delta_g^{PI}/20} \cos \vartheta_{PI}^g}{|G_p(j\omega_{pc}^{PI})|} \quad (15)$$

$$k_i = \frac{10^{-\Delta_g^{PI}/20} \omega_{pc}^{PI} \sin \vartheta_{PI}^g}{|G_p(j\omega_{pc}^{PI})|} \quad (16)$$

w których ω_{pc}^{PI} jest pulsacją odcięcia fazowej charakterystyki układu otwartego, wyznaczoną z równania

$$\arg G_p(j\omega_{pc}^{PI}) = -\vartheta_{PI}^g - 180^\circ = -175^\circ.$$

Z tabeli 1 wynika, że

$$\omega_{pc}^{PI} = 13.419 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Parametry regulatora wynoszą zatem:

$$k_p = 0.979 \quad \text{oraz} \quad k_i = 1.1498 \text{ s}^{-1}.$$

Rozważany układ regulacji posiada zapas fazy

$$\Delta_p^{PI} = 53.99^\circ$$

przy pulsacji odcięcia amplitudowej charakterystyki układu otwartego równej

$$\omega_{gc}^{PI} = 5.773 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- d) Parametry regulatora PI , zapewniające układowi regulacji wskaźniki

$$\Delta_p^{PI} = 45^\circ \quad \text{oraz} \quad \omega_{gc}^{PI} = 1.25\omega_{gc}^P = 7.22 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

wyznaczamy ze wzorów (13) oraz (14), przy czym w tym przypadku

$$\begin{aligned} \vartheta_{PI}^p &= \Delta_p^{PI} - \arg G_p(j\omega_{gc}^{PI}) - 180^\circ \\ &= 45^\circ + 130.83^\circ - 180^\circ \\ &= -4.17^\circ. \end{aligned}$$

Rozwiązaniem jest zatem regulator o parametrach:

$$k_p = 1.3379 \quad \text{oraz} \quad k_i = 0.7043 \text{ s}^{-1}.$$

Zapas wzmocnienia układu, w którym zastosowano ten regulator, wynosi

$$\Delta_g^{PI} = 10.04 \text{ dB}$$

zaś pulsacja odcięcia charakterystyki fazowej odpowiedniego układu otwartego ma wartość

$$\omega_{pc}^{PI} = 13.99 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- e) Regulator PI powinien zapewnić wskaźniki:

$$\Delta_g^{PI} = 18 \text{ dB} \quad \text{oraz} \quad \omega_{pc}^{PI} = 0.85\omega_{pc}^P = 12.268 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Parametry regulatora wyznaczamy ze wzorów (15) oraz (16), w których kładziemy

$$\vartheta_{PI}^g = -\arg G_p(j\omega_{pc}) - 180^\circ = 168.78^\circ - 180^\circ = -11.22^\circ.$$

Poszukiwane parametry regulatora PI równają się:

$$k_p = 0.4054 \quad \text{oraz} \quad k_i = 0.9865 \text{ s}^{-1}.$$

Wynikowy zapas fazy układu regulacji wynosi

$$\Delta_p^{PI} = 73.29^\circ$$

przy pulsacji odcięcia charakterystyki amplitudowej układu otwartego

$$\omega_{gc}^{PI} = 2.723 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

- Zauważmy, że zadanie rozwiązano w oparciu o **nieparametryczny** model sterowanego obiektu.

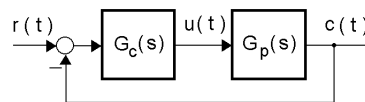
'W rzeczywistości' transmitancja tego obiektu ma postać

$$G_p(s) = \frac{2.4}{(1 + 0.2s)^2(1 + 0.04s)(1 + 0.01s)}.$$

REGULATOR PID

- Rozważmy układ regulacji (rys. 21) złożony z obiektu o transmitancji $G_p(s)$ oraz regulatora PID o idealizowanej transmitancji

$$G_{PID}(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s.$$



Rysunek 21: Strukturalny schemat układu regulacji

- Określmy wartości nastaw k_p , k_i oraz k_d tego regulatora, które zapewnią projektowanemu układowi wymagane własności, opisane specyfikacjami dotyczącymi każdej z trzech podstawowych dziedzin jakości regulacji: **stabilności**, **szybkości** oraz **dokładności**.
- Niech ω_{gc} oznacza pulsację odcięcia amplitudowej charakterystyki transmitancji otwartego układu regulacji, zaś Δ_p oznacza zapas fazy projektowanego układu. Mamy zatem:

$$\begin{aligned} |G_{PID}(j\omega_{gc})G_p(j\omega_{gc})| &= 1 \\ \arg(G_{PID}(j\omega_{gc})G_p(j\omega_{gc})) &= \Delta_p - 180^\circ. \end{aligned}$$

- Zachodzi

$$\lim_{s \rightarrow 0} sG_{PID}(s) = k_i$$

co oznacza, iż wartość parametru k_i oszacować można na podstawie wymaganej **statycznej dokładności** regulacji (w szczególności odnosi się to do wymagań wyrażonych poprzez ograniczenia nałożone na wartości współczynników wzmocnienia prędkościowego k_v lub wzmocnienia przyspieszeniowego k_a).

- Przyjmując k_i jako nastawę swobodną, otrzymujemy:

$$k_p(k_i) = \frac{\cos \vartheta_{PID}^p}{|G_p(j\omega_{gc})|} \quad (17)$$

$$k_d(k_i) = \frac{\sin \vartheta_{PID}^p}{\omega_{gc}|G_p(j\omega_{gc})|} + \frac{k_i}{\omega_{gc}^2} \quad (18)$$

gdzie

$$\vartheta_{PID}^p = \arg G_{PID}(j\omega_{gc}) = \Delta_p - \arg G_p(j\omega_{gc}) - 180^\circ.$$

- Wymagania dotyczące **stabilności** zamkniętego układu regulacji można także formułować, podając nierównościowe ograniczenia na wartość wskaźnika oscylacyjności M_r układu zamkniętego bądź też na wartość przeregulowania κ odpowiedzi skokowej tego układu.
- Podobnie postępuje się w przypadku wymagań odnoszących się do **szybkości regulacji** – wymagania takie mogą być wyrażone w postaci ograniczeń nierównościowych nałożonych na pasmo przenoszenia ω_{3dB} układu zamkniętego, na rezonansową pulsację ω_r tego układu, bądź też, ewentualnie, na czas ustalania $T_{s\Delta}$ jego odpowiedzi skokowej.

- W przypadku, w którym wymagania projektowe sformułowano w postaci pary wskaźników

$$(\Delta_g, \omega_{pc})$$

gdzie Δ_g jest zapasem wzmocnienia, zaś ω_{pc} oznacza pulsację odcięcia fazowej charakterystyki transmitancji $G_{PID}(s)G_p(s)$, odpowiednie zależności na parametry k_p oraz k_d regulatora PID przyjmują postać:

$$k_p(k_i) = \frac{\cos \vartheta_{PID}^g}{10^{\Delta_g/20} |G_p(j\omega_{pc})|}$$

$$k_d(k_i) = \frac{\sin \vartheta_{PID}^g}{10^{\Delta_g/20} \omega_{pc} |G_p(j\omega_{pc})|} + \frac{k_i}{\omega_{pc}^2}$$

z wyróżnionym swobodnym parametrem k_i oraz kątem

$$\vartheta_{PID}^p = \arg G_{PID}(j\omega_{pc}) = -\arg G_p(j\omega_{pc}) - 180^\circ.$$

Przykład 12

- Dla sterowanego obiektu opisanego transmitancją

$$G_p(s) = \frac{5}{(1 + 0.2s)(1 + 0.02s)(1 + 0.006s)(1 + 0.001s)}$$

wyznacz wartości nastaw regulatora *PID*, przy których układ zamknięty będzie posiadał:

- wskaźnik oscylacyjności $M_r \approx 1.4$,
 - pulsację rezonansową $\omega_r \approx 100 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$,
 - wzmocnienie prędkościowe $k_v = 100$.
- Na podstawie wskaźnika oscylacyjności M_r wyznaczamy (pomocniczą) przybliżoną wartość współczynnika tłumienia ζ , odpowiadającego parze dominujących sprzężonych biegunów zespolonych transmitancji zamkniętego układu regulacji

$$\zeta = 0.3874.$$

Współczynnikiemu temu przyporządkować można oszacowanie zapasu fazy

$$\Delta_p = 41.933^\circ.$$

- Przybliżoną wartość pulsacji odcięcia ω_{gc} amplitudowej charakterystyki transmitancji otwartego układu regulacji obliczamy na podstawie wymaganej pulsacji rezonansowej ω_r

$$\omega_{gc} = 103.1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Dla pulsacji odcięcia zachodzi:

$$\begin{aligned} |G_p(j\omega_{gc})| &= 0.0894 \\ \arg G_p(j\omega_{gc}) &= -188.98^\circ \end{aligned}$$

zatem

$$\begin{aligned} \vartheta_{PID}^p &= \arg G_{PID}(j\omega_{gc}) \\ &= \Delta_p - \arg G_p(j\omega_{gc}) - 180^\circ \\ &= 50.913^\circ. \end{aligned}$$

- Współczynnik wzmocnienia prędkościowego rozważanego układu regulacji dany jest wzorem

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sG_{PID}(s)G_p(s) = \lim_{s \rightarrow 0} k_i G_p(s).$$

Przeto, biorąc pod uwagę, że

$$k_i G_p(0) = 100$$

otrzymujemy

$$k_i = 20.$$

Wartości pozostałych parametrów tego regulatora obliczamy na podstawie wzorów (17) oraz (18), uzyskując:

$$k_p = 7.0523 \quad \text{oraz} \quad k_d = 0.08609 \text{ s}.$$

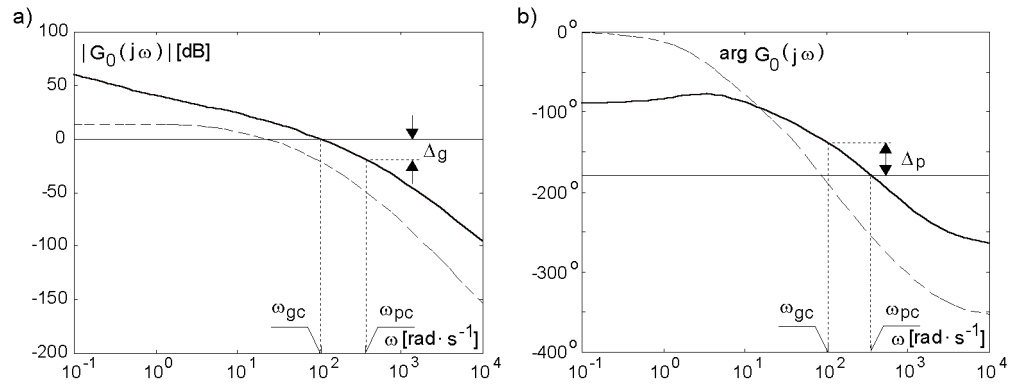
Transmitancja regulatora *PID* przyjmuje zatem postać

$$G_{PID}(s) = 7.0523 + \frac{20}{s} + 0.08609s.$$

- Układ zamknięty z tym regulatorem posiada własności opisane wskaźnikami (vivat MATLAB!):

$$\begin{aligned} \Delta_g &= 18.86 \text{ dB}, & \Delta_p &= 41.9^\circ, & \omega_{pc} &= 369.1 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ M_r &= 1.4, & \omega_r &= 99.89 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}, & k_v &= 100. \end{aligned}$$

- Częstotliwościowe charakterystyki układu otwartego pokazano na rys. 22.



Rysunek 22: Częstotliwościowe charakterystyki otwartych układów regulacji:
 - - - układ bez korekty, — układ z regulatorem *PID*.