

Podstawy Automatyki (9)

Metoda linii pierwiastkowych - synteza

Piotr Jacek Suchomski

Katedra Systemów Automatyki
WETI, Politechnika Gdańska

15 grudnia 2010

O czym będziemy mówili?

ZAŁOŻENIA

KOREKCJA
STATYCZNA

KOREKCJA
DYNA-
MICZNA

Przyspieszanie fazy

Przyspieszanie fazy -
rozwiązanie ogólne

Opóźnianie fazy

Regulacja PID

1 ZAŁOŻENIA

2 KOREKCJA STATYCZNA

3 KOREKCJA DYNAMICZNA

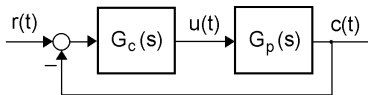
Przyspieszanie fazy

Przyspieszanie fazy - rozwiązanie ogólne

Opóźnianie fazy

Regulacja PID

Linie pierwiastkowe - synteza



Podstawowy schemat układu zamkniętego

- Funkcja przenoszenia układu zamkniętego

$$G_{cr}(s) := \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)G_p(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

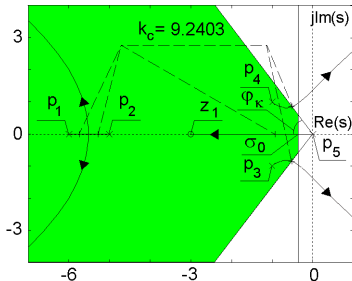
- Zasada biegunów dominujących – tak, ale nie tylko.
- Co ze statyczną dokładnością regulacji?
- Do czego jeszcze można wykorzystać metodę LP?

Korekcja typu P – przykład

- Model obiektu i regulatora:

$$G_p(s) = \frac{3 + s}{s(5 + s)(6 + s)(2 + 2s + s^2)}, \quad G_c(s) = k_c.$$

- LP: $p_1 = -6, p_2 = -5, p_{3,4} = -1 \pm j1, p_5 = 0, z_1 = -3$



Obraz linii pierwiastkowych

Korekcja typu P – przykład

- Wymagania na odpowiedź skokową:

$$\kappa \leq 0.15 \text{ oraz } T_{s2\%} \leq 8 \text{ s.}$$

- Obszar dopuszczalny dla biegunów $G_{cr}(s)$:

- stabilność: $k_C < \bar{k}_C$, gdzie $\bar{k}_C = 35.519$,

- dla pary wskaźników $(\kappa, T_{s\Delta})$ wspólna część:

- półpłaszczyzny \mathbb{C}_- na lewo od prostej $s = \sigma_0$, gdzie:

$$\sigma_0 = -\zeta \bar{T}_{s\Delta} / T_{s\Delta} \quad \text{– zależność dokładna}$$

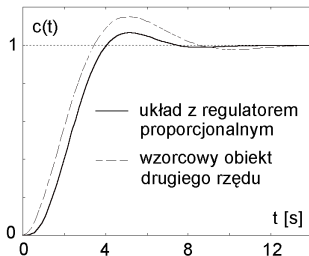
$$\sigma_0 \approx -3 / T_{s5\%} \quad \text{albo} \quad \sigma_0 \approx -4 / T_{s2\%} \quad \text{– przybliżona}$$

- stożka opisanego kątami $(\varphi_\kappa, -\varphi_\kappa)$, gdzie:

$$\varphi_\kappa = \arctan \left(\frac{\pi}{|\ln \kappa|} \right), \quad \zeta = \frac{|\ln \kappa|}{\sqrt{\pi^2 + \ln^2 \kappa}}.$$

Korekcja typu P – przykład

- $\bar{k}_C = 35.519$,
- $\kappa = 0.15 \Rightarrow (\zeta = 0.5169, \bar{T}_{s2\%} = 5.7428)$,
- $(\kappa = 0.15, T_{s2\%} = 8 \text{ s}) \Rightarrow (\sigma_0 = -0.371, \varphi_\kappa = 58.87^\circ)$,
- rlocfind (MATLAB) $\Rightarrow k_C = 9.2403$
- $(\kappa = 0.064 < 0.15, T_{s2\%} = 6.75 \text{ s} < 8 \text{ s})$.



Ilustracja odpowiedzi skokowej

Przyspieszanie fazy – przykład

- Model sterowanego obiektu

$$G_p(s) = \frac{12}{s(3.2 + s)(7.5 + s)}$$

- Regulator proporcjonalno-różniczkujący PD:

- a) idealny (nierealizowalny)

$$G_c(s) = G_{PD_i}(s) := k \cdot (z + s)$$

- b) rzeczywisty (realizowalny)

$$G_c(s) = G_{PD_r}(s) := k \cdot \frac{z + s}{10z + s}$$

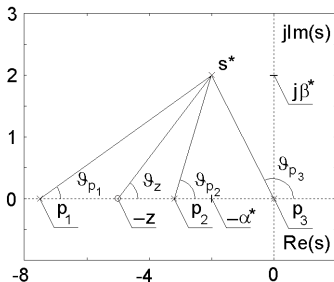
Przyspieszanie fazy – przykład

- Odpowiedź skokowa z $\kappa_0\% \approx 5\%$ oraz $T_{s2\%} \approx 2$ s.



bieguny dominujące $\{-\alpha^* \pm j\beta^*\} = \{-2 \pm j2\}$

- Linie pierwiastkowe



Przyczynki fazowe odpowiadające rozkładowi biegunów i zer funkcji przenoszenia układu otwartego

Regulator PD - idealny

- $G_{PD_i}(s)G_p(s) := k \cdot \tilde{G}_0(s)$, gdzie

$$\tilde{G}_0(s) = (z + s) \cdot G_p(s).$$

- Bieguny $G_p(s)$: $p_1 = -7.5$, $p_2 = -3.2$ oraz $p_3 = 0$
- Warunek fazowy: $\arg \tilde{G}_0(s^*) = r \cdot 180^\circ$, $r = \pm 1 \pm 3, \dots$

↓

$$\vartheta_z - \vartheta_{p_1} - \vartheta_{p_2} - \vartheta_{p_3} = -180^\circ$$

$$\vartheta_z = \arctan\left(\frac{2}{z-2}\right) \quad \text{– zależy od regulatora}$$

$$\vartheta_{p_1} + \vartheta_{p_2} + \vartheta_{p_3} = 214.02^\circ$$

Regulator PD - idealny

ZAŁOŻENIA

KOREKCJA
STATYCZNA

KOREKCJA
DYNA-
MICZNA

Przyspieszanie fazy

Przyspieszanie fazy -
rozwiązanie ogólne

Opóźnianie fazy

Regulacja PID

- $\vartheta_z = 34.02^\circ \quad \Rightarrow \quad z = 4.963.$

- Warunek amplitudowy:

$$|k \cdot \tilde{G}_0(s^*)| = 1$$

↓

$$k = 1/|\tilde{G}_0(s^*)| \approx 0.900$$

Regulator PD - realizowalny

- $G_{PD_r}(s)G_p(s) := k \cdot \tilde{G}_0(s)$, gdzie

$$\tilde{G}_0(s) = \frac{12(z + s)}{s(10z + s)(3.2 + s)(7.5 + s)}.$$

- $\arctan(2/(z - 2)) - \arctan(2/(10z - 2)) = 34.02^\circ$

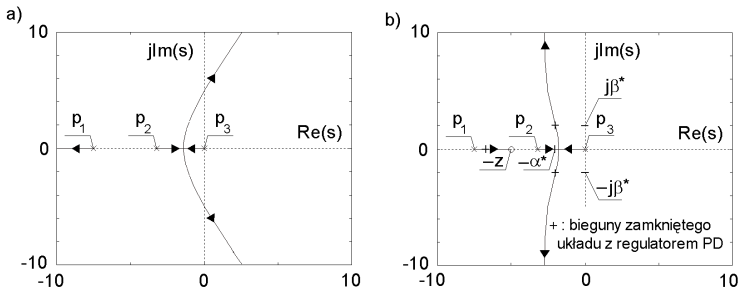


$G_{PD_r}(s^*) > 0$ – przyspieszanie (forsowanie) fazy

- $(5.4001 - 32.8504z + 6.7502z^2 = 0) \Rightarrow (z = 4.696).$
- Z warunku amplitudowego: $k = 1/|\tilde{G}_0(s^*)| \approx 43.134.$

Przyspieszanie fazy – przykład

- Linie pierwiastkowe:



a - układ z regulatorem proporcjonalnym,

b - układ z idealizowanym regulatorem PD $G_{PD_i}(s)$

a) $\kappa_{0\%} = 4.95\%$ oraz $T_{S2\%} = 2.06 \text{ s}$,

b) $\kappa_{0\%} = 5.05\%$ oraz $T_{S2\%} = 2.08 \text{ s}$.

Przyspieszanie fazy – koszty

- Koszty sterowania

$$G_{ur}(s) := \frac{U(s)}{R(s)} = \frac{G_c(s)}{1 + G_c(s)G_p(s)}$$

- Dla $G_c(s) = G_{PD_r}(s)$ i sygnale zadającym $r(t) = 1(t)$

$$u_0 = u_0 := \lim_{t \rightarrow 0} u(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} (sG_{ur}(s)R(s)) = k.$$

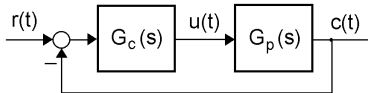
Stąd $u_0 = 43.1336$.

- $u_{0\max}$ – maksymalna dopuszczalna wartość u_0

$$G_{PD_r}(s) := k \cdot \frac{z + s}{1 + T_D s} \quad \text{tak, aby} \quad u_0 = \frac{k}{T_D} \leq u_{0\max}$$

Synteza: (k, z) – regulator idealny oraz $T_D \approx k/u_{0\max}$

Przyspieszanie fazy - rozwiązanie ogólne



Schemat układu zamkniętego

- Korektor $G_c(s) := \frac{a_0 + a_1 s}{1 + b_1 s}$.
- Dominujące bieguny $\{s^*, \bar{s}^*\}$ funkcji $G(s) := \frac{C(s)}{R(s)}$.
- $s^* := -\alpha^* + j\beta^* \left(= -\frac{\zeta}{\tau} + j\frac{\sqrt{1 - \zeta^2}}{\tau} \right)$.

Przyspieszanie fazy

- $s^* := |s^*|e^{j\varphi^*}$ oraz $G_p(s^*) := |G_p(s^*)|e^{j\vartheta}$.
- Równanie charakterystyczne: $1 + G_c(s^*)G_p(s^*) = 0$.
- Dla parametru swobodnego a_0 oraz $|G_p(s^*)| \neq 0$:

$$A \begin{bmatrix} a_1(a_0) \\ b_1(a_0) \end{bmatrix} = b(a_0)$$

gdzie:

$$A := \begin{bmatrix} |s^*| \cos(\varphi^*) & \frac{|s^*| \cos(\varphi^* - \vartheta)}{|G_p(s^*)|} \\ |s^*| \sin \varphi^* & \frac{|s^*| \sin(\varphi^* - \vartheta)}{|G_p(s^*)|} \end{bmatrix}$$
$$b(a_0) := \begin{bmatrix} -a_0 - \frac{\cos \vartheta}{|G_p(s^*)|} \\ \frac{\sin \vartheta}{|G_p(s^*)|} \end{bmatrix}.$$

Przyspieszanie fazy

- Rodzina rozwiązań $\{a_1(a_0), b_1(a_0)\}$ (dla $\det A \neq 0$):

$$a_1(a_0) = \frac{a_0 |G_p(s^*)| \sin(\varphi^* - \vartheta) + \sin \varphi^*}{|s^*| |G_p(s^*)| \sin \vartheta}$$
$$b_1(a_0) = \frac{-a_0 |G_p(s^*)| \sin \varphi^* - \sin(\varphi^* + \vartheta)}{|s^*| \sin \vartheta}.$$

- Stabilność i szybkość $\Rightarrow \{s^*, \bar{s}^*\}$.
- $\vartheta_+ := \arg G_c(s^*)$.
- Warunek niezbędności korekcji (przyspieszanie fazy):

$$\vartheta_+ > 0 \quad \text{oraz} \quad \vartheta + \vartheta_+ = \pm 180^\circ.$$

Przyspieszanie fazy

$$1) 90^\circ < \varphi^* < 180^\circ \Rightarrow \sin \varphi^* > 0$$

2) Statyczne wzmocnienie korektora (kładziemy $a_0 > 0$):

$$G_c(0) = \left. \frac{a_0 + a_1 s}{1 + b_1 s} \right|_{s=0} = a_0.$$

- Wymóg stabilności korektora: $b_1 \geq 0$.
- Wymóg minimalnofazowości korektora: $a_1 > 0$

3) Możliwa do uzyskania dodatnia korekty fazy:

$$0^\circ < \vartheta_+ < \varphi^*.$$

Przyspieszanie fazy

- 4) Konieczne i wystarczające warunki stosowania regulatora $G_c(s)$:

$$-\varphi^* - 180^\circ < \vartheta < -180^\circ$$

$$-\varphi^* - 180^\circ < \vartheta < 180^\circ.$$

- 5) Położenie bieguna i zera korektora forsującego fazę:

$$-1/b_1 < -a_0/a_1 < 0.$$

- 6) Korektor jest stabilny dla $a_0 < a_{0\max}$, gdzie

$$a_{0\max} = \frac{-\sin(\varphi^* + \vartheta)}{|G_p(s^*)| \sin \varphi^*}.$$

Dla $a_0 = a_{0\max}$ mamy $b_1 = 0$ (idealna korekcja PD).

Przyspieszanie fazy

$$7) a_0 < a_{0\max} \quad \Rightarrow \quad a_1(a_0) > 0, \quad b_1(a_0) > 0.$$

8) Pobudzenie $r(t) = 1(t)$ i ściśle właściwa fp obiektu:

$$u_0 = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_0 |G_p(s^*)| \sin(\varphi^* - \vartheta) + \sin \varphi^*}{|G_p(s^*)| (-a_0 |G_p(s^*)| \sin \varphi^* - \sin(\varphi^* + \vartheta))}.$$

9) Komentarze i wnioski:

- o dominującej roli pary biegunów $\{s^*, \bar{s}^*\}$,
- o statycznej dokładności regulacji,
- o wymaganiach na sygnał sterujący,
- o wrażliwości na zakłócenia.

Przyspieszanie fazy

- Inna parametryzacja korektora forsującego fazę:

$$G_c(s) := k \cdot \frac{\frac{1}{T} + s}{\frac{1}{\alpha T} + s}, \quad k, T > 0, \quad 0 < \alpha < 1.$$

- Z warunku amplitudowego:

$$k = -\frac{1}{G_p(s^*)} \cdot \frac{s^* + \frac{1}{\alpha T}}{s^* + \frac{1}{T}}.$$

- Z warunku fazowego:

$$\vartheta_+ = -180^\circ - \arg G_p(s^*)$$

gdzie

$$\vartheta_+ := \arg G_c(s^*).$$

Przyspieszanie fazy

- Dla ustalonego T (np. największa stała czasowa obiektu):

$$\frac{1}{\alpha T} = \alpha^* + \frac{\beta^*}{\tan \left(\arctan \left(\frac{\beta^*}{\frac{1}{T} - \alpha^*} \right) - \vartheta_+ \right)}.$$

- W trosce o statyczną dokładność regulacji należałoby zwiększać wypadkową wartość:

$$G_c(0) = k\alpha$$

ale uwaga na początkowe sterowanie $u(0) = k$.

ZAŁOŻENIA

KOREKCJA
STATYCZNAKOREKCJA
DYNAMA-
MICZNA

Przyspieszanie fazy

Przyspieszanie fazy -
rozwiązanie ogólne

Opóźnianie fazy

Regulacja PID

Przyspieszanie fazy – przykład

- Obiekt: $G_p(s) = \frac{2}{s(3+s)(8+s)}$.
 - Układ zamknięty bez korekcji: $\kappa \leq 0.2$ oraz $T_{s5\%} \approx 1$ s.
 - Wymaga się aby: $\kappa \leq 0.2$ oraz $T_{s5\%} \approx 1$ s.
 - $\zeta(\kappa) = |\ln \kappa| / \sqrt{\pi^2 + \ln^2 \kappa} \Rightarrow \zeta = 0.4559$.
 - $\tau = T_{s5\%} / \bar{T}_{s5\%}(\zeta) = T_{s5\%} / 5.2536 \Rightarrow \tau = 0.1904$ s.
- ↓
- $s^* = -2.3959 + j4.6757$.

Przyspieszanie fazy – przykład

ZAŁOŻENIA

KOREKCJA
STATYCZNA

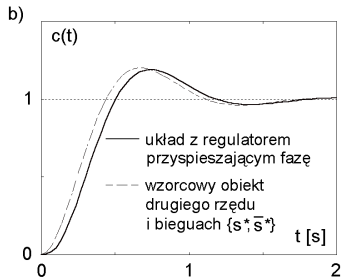
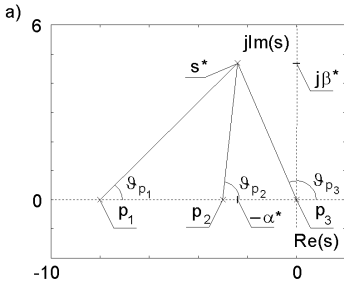
KOREKCJA
DYNA-
MICZNA

Przyspieszanie fazy

Przyspieszanie fazy -
rozwiązanie ogólne

Opóźnianie fazy

Regulacja PID



Ilustracja syntezy korektora przyspieszającego fazę:

a - przyczynki fazowe odpowiadające biegunom f_p obiektu,

b - odpowiedzi skokowe układów zamkniętych

- $\vartheta := \arg G_p(s^*) = -\vartheta_{p_1} - \vartheta_{p_2} - \vartheta_{p_3}$

$$p_1 = -8, \quad p_2 = -3 \quad \text{oraz} \quad p_3 = 0$$

$$\vartheta_{p_1} = 39.837^\circ, \quad \vartheta_{p_2} = 82.632^\circ \quad \text{oraz} \quad \vartheta_{p_3} = 117.126^\circ$$

Przyspieszanie fazy – przykład

- $\arg G_p(s^*) = -239.595^\circ \Rightarrow \vartheta_+ = 59.595^\circ.$
- Kompensacja dominującej stałej czasowej obiektu

$$T = 1/3 \text{ s}$$

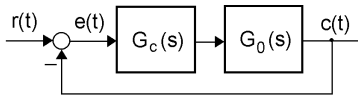
daje

$$G_c(s) = 229.0859 \cdot \frac{3 + s}{13.391 + s} \quad \text{oraz} \quad \alpha = 0.2240.$$

- Sumulacja układu zamkniętego:

$$u_0 = 229.0859, \quad \kappa \approx 0.1886 \quad \text{oraz} \quad T_{s5\%} \approx 1.06 \text{ s.}$$

Opóźnianie fazy



Podstawowy schemat układu zamkniętego

- Dla $G_c(s) = 1$:
 - układ zamknięty jest stabilny, $G_{cr}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$,
 - parą biegunów dominujących fp $G_{cr}(s)$ jest $\{s^*, \bar{s}^*\}$.
- Szukamy korektora $G_c(s)$, dla którego:
 - układ zamknięty jest stabilny, $G_{cr}(s) \in \mathcal{RH}_\infty$,
 - biegunami dominującymi fp $G_{cr}(s) \approx s_\beta \{s^*, \bar{s}^*\}$,
 - statyczna dokładność wzrasta β -krotnie, $\beta > 1$.

Opóźnianie fazy

- Korektor pierwszego rzędu

$$G_C(s) = G_{C-}(s)$$

gdzie:

$$G_{C-}(s) := \frac{z + s}{p + s}.$$

- Wzmocnienie statyczne korektora:

$$G_{C-}(0) = z/p \quad \Rightarrow \quad z > p.$$

⇓

$$\arg G_{C-}(s^*) < 0$$

stąd konieczność opóźniania fazy.

Opóźnianie fazy

- Poprawa dokładności statycznej:
 - układ o zerowym astatyzmie, $k_0 := \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s)$

$$\frac{z}{p} = \frac{\beta(1 + k_0) - 1}{k_0},$$

- układ astatyczny

$$\frac{z}{p} = \beta.$$

- Aby zachować dominujący charakter pary $\{s^*, \bar{s}^*\}$:

$$|G_{c-}(s^*)| = \sqrt{\frac{(z - \alpha^*)^2 + (\beta^*)^2}{(p - \alpha^*)^2 + (\beta^*)^2}} \approx 1$$

$$\arg G_{c-}(s^*) = \arctan \left(\frac{\beta^*(p - z)}{(p - \alpha^*)(z - \alpha^*) + (\beta^*)^2} \right) \approx 0.$$

Opóźnianie fazy

- $\alpha^* - z \approx \alpha^*$ oraz $\alpha^* - p \approx \alpha^*$

$$\Downarrow$$

$\{-z, -p\} \in \mathbb{C}_-$ w pobliżu $(0, 0)$.

- $\arg G_{c_-}(s^*) \approx \arctan \left(\frac{\beta^*(p - z)}{(\alpha^*)^2 + (\beta^*)^2} \right) \approx \vartheta_-$

gdzie parametr

$$\vartheta_- < 0, \quad |\vartheta_-| \approx 0$$

to dopuszczalny kąt $\arg G_{c_-}(s^*)$.

Opóźnianie fazy

- Układ o zerowym astatyzmie, $k_0 := \lim_{s \rightarrow 0} G_0(s)$:

$$p \leq -\frac{k_0}{(1+k_0)(\beta-1)} \cdot \frac{(\alpha^*)^2 + (\beta^*)^2}{\beta^*} \cdot \tan \vartheta_-.$$

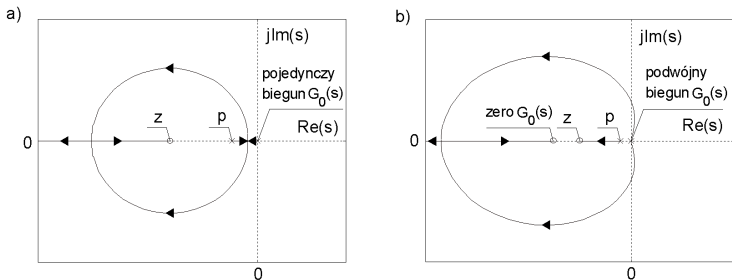
Gdy $k_0 \gg 1$ oraz $\beta \gg 1$:

$$p \leq -\frac{(\alpha^*)^2 + (\beta^*)^2}{\beta\beta^*} \cdot \tan \vartheta_-.$$

- Układ astatyczny:

$$p \leq -\frac{(\alpha^*)^2 + (\beta^*)^2}{(\beta-1)\beta^*} \cdot \tan \vartheta_-.$$

Opóźnianie fazy



Linie pierwiastkowe w otoczeniu początku układu współrzędnych dla układów astatycznych z korekcją opóźniającą fazę:

a - astatyzm pierwszego stopnia, **b** - astatyzm drugiego stopnia

Opóźnianie fazy – koszty

- Groźba destabilizacji układu zamkniętego:

$$\arg G_{c-}(j\omega) < 0, \quad \forall \omega > 0.$$

- Groźba spowolnienia procesów przejściowych:
pojawienie się wolnego modu odpowiadającego

$$e^{-\hat{p}t}$$

gdzie

$$\hat{p} > 0 \quad \text{oraz} \quad \hat{p} \approx 0$$

wynika z obecności bieguna $(-p)$ korektora $G_{c-}(s)$.

Opóźnianie fazy – koszty

- Najwolniejszy mod odpowiedzi skokowej układu o zerowym astatyzmie

$$\hat{h}e^{-\hat{p}t}$$

gdzie:

$$\hat{h} \approx e_p \cdot \frac{1 - \beta}{\beta} \approx -e_p$$

$$\hat{p} \approx \frac{\beta(1 - e_p)}{\beta - e_p} \cdot z \approx (1 - e_p) \cdot z$$

zaś e_p – błąd położeniowy układu bez korekcji.

- $\hat{h} < 0$ oraz $|\hat{h}|$ może być 'duże'.

Opóźnianie fazy – koszty

- Najwolniejszy mod odpowiedzi skokowej układu astatycznego

$$\hat{h}e^{-\hat{p}t}$$

gdzie:

$$\hat{h} \approx \frac{\hat{p} - z}{z} = \frac{\hat{p} - \beta p}{\beta p} \quad (\text{może być } \approx 0)$$

$$\hat{p} \approx z = \beta p.$$

- Astatyzm 1. stopnia: $\hat{h} > 0$.
- Astatyzm 2. stopnia: $\hat{h} < 0$.
- Dla $r(t) = t^N/N! \cdot 1(t)$ współczynnik udziału najwolniejszego modu odpowiedzi $\approx \hat{h}/(-\hat{p})^N$.

Opóźnianie fazy – przykład

- $G_0(s) = \frac{1}{s(1+s)(2+s)}$

- Bez korekcji:

$$G_{cr}(s) = \frac{G_0(s)}{1 + G_0(s)} = \frac{1}{1 + 2s + 3s^2 + s^3}$$

Bieguny dominujące: $\{-\alpha^* \pm j\beta^*\} = \{-0.3376 \pm j0.5623\}$

Odpowiedź skokowa:

$$\kappa = 0.1446, T_{s5\%} = 8.5151 \text{ s i } T_{s2\%} = 9.2129 \text{ s.}$$

Wzmocnienie prędkościowe: $k_v := \lim_{s \rightarrow 0}(sG_0(s)) = 0.5$.

Błąd prędkościowy:

$$e_v = 1/k_v = 2, T_{vs5\%} = 7.0042 \text{ s, } T_{vs2\%} = 11.409 \text{ s.}$$

Opóźnianie fazy – przykład

- Zmniejszenie błędu: $e_{v-} = 0.2 \Rightarrow \beta = 10$.
- Parametryzacja korektora opóźniającego fazę:

a) Dla $\vartheta_- = -5^\circ$:

$$p = 7.4368 \cdot 10^{-3}, \quad z = 7.4368 \cdot 10^{-2}$$

$$\kappa = 0.2994$$

$$T_{s5\%} = 11.1470 \text{ s}, \quad T_{s2\%} = 25.6690 \text{ s}$$

$$T_{vs5\%} = 62.4507 \text{ s}, \quad T_{vs2\%} = 73.0810 \text{ s}.$$

b) Dla $\vartheta_- = -2^\circ$:

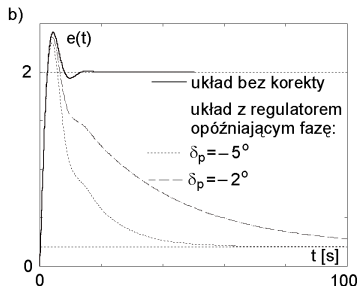
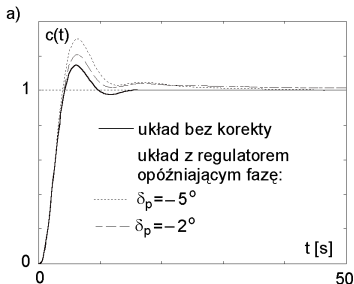
$$p = 2.9684 \cdot 10^{-3}, \quad z = 2.9684 \cdot 10^{-2}$$

$$\kappa = 0.2085$$

$$T_{s5\%} = 9.8620 \text{ s}, \quad T_{s2\%} = 35.4930 \text{ s}$$

$$T_{vs5\%} = 167.8870 \text{ s}, \quad T_{vs2\%} = 197.0951 \text{ s}.$$

Opóźnianie fazy – przykład

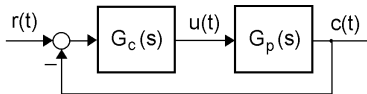


Właściwości układu z korektorem opóźniającym fazę:

a - odpowiedzi skokowe, **b** - błąd śledzenia sygnału prędkościowego

- Komentarze i wnioski.

Nastawianie regulatora PID



Podstawowy schemat układu zamkniętego

- Idealizowana fp regulatora proporcjonalno-całkująco-różniczkującego PID:

$$G_c(s) = k_p + \frac{k_i}{s} + k_d s.$$

- Zadana para biegunów fp układu zamkniętego $G_{cr}(s)$:

$$\{s^*, \bar{s}^*\}.$$

- $s^* := |s^*|e^{j\varphi^*}$ oraz $G_p(s^*) := |G_p(s^*)|e^{j\theta}$.

Nastawianie regulatora PID

- k_i – nastawa swobodna:

$$\lim_{s \rightarrow 0} (sG_C(s)) = k_i$$

$$\Downarrow$$

k_i z wymagań na statyczną dokładność regulacji.

-

$$A \begin{bmatrix} k_p(k_i) \\ k_d(k_i) \end{bmatrix} = b(k_i)$$

gdzie:

$$A = \begin{bmatrix} |s^*| \cos \varphi^* & |s^*|^2 \cos(2\varphi^*) \\ |s^*| \sin \varphi^* & |s^*|^2 \sin(2\varphi^*) \end{bmatrix}$$

$$b(k_i) = \begin{bmatrix} -k_i - \frac{|s^*| \cos(\varphi^* - \vartheta)}{|G_p(s^*)|} \\ \frac{-|s^*| \sin(\varphi^* - \vartheta)}{|G_p(s^*)|} \end{bmatrix} \cdot$$

Nastawianie regulatora PID

ZAŁOŻENIA

KOREKCJA
STATYCZNA

KOREKCJA
DYNA-
MICZNA

Przyspieszanie fazy

Przyspieszanie fazy -
rozwiązanie ogólne

Opóźnianie fazy

Regulacja PID

- Dla $|s^*| \neq 0$ oraz $\varphi^* \neq r \cdot \pi$, $r = 0, \pm 1, \dots$:

$$k_p(k_i) = \frac{-2k_i}{|s^*|} \cos \varphi^* - \frac{\sin(\varphi^* + \vartheta)}{|G_p(s^*)| \sin \varphi^*}$$

$$k_d(k_i) = \frac{k_i}{|s^*|^2} + \frac{\sin \vartheta}{|s^*| |G_p(s^*)| \sin \varphi^*}$$

Nastawianie regulatora PID

- Realizowalne różniczkowanie:
 - ograniczenie sygnału sterującego $u(t)$,
 - ograniczenie wpływu zakłóceń w torze pomiarowym:

$$\frac{k_d s}{1 + T_D s} = \frac{1}{T_D} \cdot \frac{k_d s}{1/T_D + s}, \quad T_D > 0.$$

- Początkowe sterowanie $u_0 := u(0)$ dla $r(t) = 1(t)$:

$$u_0 = \lim_{s \rightarrow \infty} (s G_{ru}(s) R(s)) = k_p + k_d / T_D.$$

- Dla $u_0 \leq u_{0\max}$, gdzie $u_{0\max} > k_p$:

$$T_D \geq \frac{k_d}{u_{0\max} - k_p}.$$

Nastawianie regulatora PID

- Regulator PD ($k_i = 0$):

$$k_p = -\frac{\sin(\varphi^* + \vartheta)}{|G_p(s^*)| \sin \varphi^*}$$

$$k_p = \frac{\sin \vartheta}{|s^*| |G_p(s^*)| \sin \varphi^*}.$$

- Regulator PI ($k_d(k_i) = 0$):

$$k_p = \frac{-\sin(\varphi^* - \vartheta)}{|G_p(s^*)| \sin \varphi^*}$$

$$k_i = \frac{-|s^*| \sin \vartheta}{|G_p(s^*)| \sin \varphi^*}.$$

-
- Zaleca się zapoznanie z zamieszczonymi w skrypcie przykładami oraz zadaniami dotyczącymi strojenia korektorów *lead-lag* oraz regulatorów PID.