

## Zastosowanie przekształcenia Laplace'a

### Przykład 1

Rozwiąż jednorodne równanie różniczkowe liniowe

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = 0$$

z warunkami początkowymi

$$y(0^+) = a, \quad \dot{y}(0^+) = b.$$

### Rozwiązanie

Dokonując transformacji Laplace'a, uzyskujemy

$$s^2Y(s) - sy(0^+) - \dot{y}(0^+) + 5(sY(s) - y(0^+)) + 6Y(s) = 0$$

skąd wynika, że

$$Y(s) = \frac{5a + b + as}{6 + 5s + s^2} = \frac{5a + b + as}{(2 + s)(3 + s)}.$$

Bieguny funkcji  $Y(s)$  są więc biegunami pojedynczymi.

Rozkładając  $Y(s)$  na ułamki proste, otrzymujemy

$$Y(s) = \frac{3a + b}{2 + s} - \frac{2a + b}{3 + s}.$$

Rozwiązanie w dziedzinie czasu wyznaczamy korzystając z odwrotnej transformacji Laplace'a

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = (3a+b) \cdot e^{-2t} - (2a+b) \cdot e^{-3t}, \quad t \geq 0. \quad (1)$$

Sprawdźmy otrzymany wynik, stosując wzór Heaviside'a

$$y(t) = \frac{L(s)}{M'(s)} \Big|_{s=-2} \cdot e^{-2t} + \frac{L(s)}{M'(s)} \Big|_{s=-3} \cdot e^{-3t}, \quad t \geq 0$$

w którym

$$Y(s) = \frac{L(s)}{M(s)}, \quad M'(s) = \frac{dM(s)}{ds}.$$

Zatem, uwzględniając równość  $M'(s) = 5 + 2s$ , otrzymujemy wyrażenie dane wzorem (1).

## Przykład 2

Rozwiąż równanie całkowo-różniczkowe

$$\dot{y}(t) + 4 \int_0^t e^{(t-\tau)} y(\tau) d\tau + 3y(t) = 1, \quad y(0^+) = 1.$$

## Rozwiązanie

Dokonując transformacji Laplace'a, otrzymujemy

$$sY(s) - y(0^+) + 4 \cdot \mathcal{L}(e^t * y(t)) + 3Y(s) = 1/s.$$

Skąd wynika, że

$$Y(s) = \frac{s-1}{s(1+s)} = \frac{1}{1+s} - \frac{1}{s(1+s)}$$

a następnie (**znane wzory!**)

$$y(t) = e^{-t} - (1 - e^{-t}) = 2e^{-t} - 1, \quad t \geq 0.$$

### Przykład 3

Rozwiąż niejednorodne równanie różniczkowe

$$y^{(3)}(t) + 4y^{(2)}(t) + 4y^{(1)}(t) + 3y(t) = u(t)$$

zakładając wymuszenie  $u(t)$  w postaci jednostkowej funkcji skokowej oraz warunki początkowe:

$$y(0^+) = 1, \quad y^{(1)}(0^+) = 2, \quad y^{(2)}(0^+) = 3.$$

### Rozwiązanie

Stosujemy wzory:

$$\mathcal{L}(y^{(1)}(t)) = sY(s) - y(0^+)$$

$$\mathcal{L}(y^{(2)}(t)) = s^2Y(s) - sy(0^+) - y^{(1)}(0^+)$$

$$\mathcal{L}(y^{(3)}(t)) = s^3Y(s) - s^2y(0^+) - sy^{(1)}(0^+) - y^{(2)}(0^+).$$

Na tej podstawie mamy

$$Y(s) = \frac{1 + 15s + 6s^2 + s^3}{s(3 + 4s + 4s^2 + s^3)}. \quad (2)$$

Rozkładając (2) na ułamki proste, uzyskujemy

$$Y(s) = \frac{1}{3s} + \frac{0.80952}{3 + s} - \frac{-4.28571 + 0.14286s}{0.86603^2 + (0.5 + s)^2}.$$

Na tej podstawie otrzymujemy

$$y(t) = 0.33333 + 0.80952e^{-3t} + 5.03322e^{-5t} \cdot \sin(0.86603t - 0.02839), \quad t \geq 0.$$

#### Przykład 4

Znaleźć wartość początkową pochodnej sygnału  $f(t)$ , gdy dana jest jego transformata Laplace'a

$$F(s) = \frac{1 + 3s}{1 + s + s^2}.$$

#### Rozwiązanie

Niech  $g(t) = \dot{f}(t)$ . Wtedy

$$G(s) = \mathcal{L}(g(t)) = sF(s) - f(0^+).$$

Ale

$$f(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{s + 3s^2}{1 + s + s^2} = 3. \quad (3)$$

Stąd

$$G(s) = \frac{s + 3s^2}{1 + s + s^2} - 3 = \frac{-3 - 2s}{1 + s + s^2}.$$

Mamy zatem

$$g(0^+) = \lim_{t \rightarrow 0^+} g(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sG(s) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{-3s - 2s^2}{1 + s + s^2} = -2.$$

**Uwaga:** Formalnie rzecz biorąc, należałoby sprawdzić, czy istnieje granica  $g(0^+)$ . Wyznaczmy  $f(t)$ . Ze wzoru (3) wynika, że mianownik transformaty  $F(s)$  posiada zera zespolone:

$$1 + s + s^2 = 3/4 + (1/2 + s)^2.$$

Przeto, dla  $t \geq 0$ , mamy:

$$f(t) = -1/\sqrt{3} \cdot e^{-t/2} \cdot \sin(\sqrt{3}t/2) + 3e^{-t/2} \cdot \cos(\sqrt{3}t/2)$$

oraz

$$f(0^+) = 3.$$

Pochodna  $f(t)$ ,  $t \geq 0$ , wyraża się wzorem

$$g(t) = -\sqrt{3}e^{-t/2} \cdot \sin(\sqrt{3}t/2) - 2e^{-t/2} \cdot \cos(\sqrt{3}t/2).$$

A zatem

$$g(0^+) = -2.$$

## Zadania

### Zadanie 1

Posługując się metodą transformacji Laplace'a, rozwiąż jednorodne równanie różniczkowe

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 2y(t) = 0, \quad y(0^+) = a, \quad \dot{y}(0^+) = b.$$

### Zadanie 2

Stosując metodę transformacji Laplace'a, znajdź rozwiązanie niejednorodnego równania różniczkowego

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 5y(t) = 3 \cdot 1(t), \quad y(0^+) = 0, \quad \dot{y}(0^+) = 0.$$

### Zadanie 3

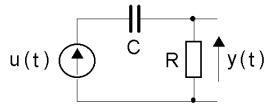
Model obiektu dynamicznego dany jest równaniem różniczkowym

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 3y(t) = u(t)$$

przy czym wszystkie warunki początkowe są zerowe. Zakładając sygnał wejściowy  $u(t) = 2 \cos 3t$ ,  $t \geq 0$ , wyznacz sygnał  $y(t)$ .

#### Zadanie 4

Schemat ideowy pokazany na rys. 1 jest modelem rzeczywistego układu różniczkującego.



Rys. 1. Obwód RC

Oblicz odpowiedź  $y(t)$  tego układu na pobudzenie skokowe  $u(t) = E \cdot 1(t)$ , jeżeli na pojemności  $C$  znajduje się ładunek początkowy  $+Q_0$ .

#### Zadanie 5

Rozwiąż układ równań różniczkowych

$$\begin{cases} \dot{y}_1 - 2\dot{y}_2 + y_1 = 1(t) \\ y_1 + \dot{y}_2 - 2y_2 = e^{-t} \cdot 1(t) \\ y_1(0^+) = 1, \quad y_2(0^+) = 0. \end{cases}$$

#### Zadanie 6

Wyznacz transformatę Laplace'a funkcji

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} 1(t-n), \quad t \geq 0.$$

#### Zadanie 7

Wyznacz transformatę Laplace'a funkcji ( $n = 0, 2, 4, \dots$ )

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{dla } n \leq t < n+1 \\ -1 & \text{dla } n+1 \leq t < n+2. \end{cases}$$

#### Zadanie 8

Znajdź oryginał  $g_n(t) = \mathcal{L}^{-1}(G_n(s))$  transformaty

$$G_n(s) = \prod_{i=1}^n (i+s)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

#### Zadanie 9

Znajdź oryginał transformaty

$$G_n(s) = \prod_{i=1}^{n-1} (2i+s) \cdot \prod_{i=1}^n (2i-1+s)^{-1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Transformata Laplace'a	$F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \int_0^\infty f(t) \cdot e^{-st} dt$
Odwrotna transformata Laplace'a	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{x-j\infty}^{x+j\infty} F(s) \cdot e^{st} ds$
Liniowość	$\mathcal{L}(\alpha f(t) + \beta g(t)) = \alpha F(s) + \beta G(s)$
Podobieństwo	$\mathcal{L}(f(\alpha t)) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0$
Przesunięcie argumentu oryginału	$\mathcal{L}(f(t - \alpha)) = F(s) \cdot e^{-\alpha s}$
Przesunięcie argumentu obrazu	$\mathcal{L}(f(t) \cdot e^{s_0 t}) = F(s - s_0) \frac{1}{s^2}$
Transformata pochodnej	$\mathcal{L}(f'(t)) = sF(s) - f(0_+)$
$1(t) - 1(t - \alpha)$	$\mathcal{L}(f^{(n)}(t)) = s^n F(s) - \sum_{i=1}^n s^{n-i} f^{(i-1)}(0_+)$
$e^{-at}$	$\mathcal{L}\left(\int_0^t f(\tau) d\tau\right) = \frac{1}{s} F(s)$
$e^{-at}$	$\mathcal{L}\left(\int_0^t \int_0^{\tau_1} \dots \int_0^{\tau_{n-1}} f(\tau_n) d\tau_n \dots d\tau_1\right) = \frac{1}{s^n} F(s)$
Granica oryginału w zerze	$\lim_{t \rightarrow 0_+} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$
Granica oryginału w nieskończoności	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$
Transformata splotu oryginałów	$\mathcal{L}(f(t) \star g(t)) = F(s) \cdot G(s)$
Całka Duhamela	$\mathcal{L}^{-1}(sF(s)G(s)) = f(t)g(0_+) + f(t) \star g'(t)$
Różniczkowanie obrazu	$F'(s) = -\mathcal{L}(tf(t))$
Wyższe pochodne obrazu	$F^{(n)}(s) = (-1)^n \mathcal{L}(t^n f(t))$
Splot obrazów	$\mathcal{L}(f(t)g(t)) = \frac{1}{2\pi j} \int_{x=\sigma-j\infty}^{x=\sigma+j\infty} F(x)G(s-x)dx$

$f(t)$	$F(s) = \mathcal{L}(f(t))$
$\delta(t)$	1
$1(t)$	$\frac{1}{s}$
$t^2$	$\frac{1}{s^2}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	$\frac{1}{s^n}$
$1(t) - 1(t - \alpha)$	$\frac{1}{s}(1 - e^{-\alpha s})$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{s + \alpha}$
$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\alpha t}, \quad n > 0$	$\frac{1}{(s + \alpha)^n}$
$\frac{1}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{s(s + \alpha)}$
$\frac{1}{\beta - \alpha}(e^{-\alpha t} - e^{-\beta t})$	$\frac{1}{(s + \alpha)(s + \beta)}$
$\frac{1}{\alpha\beta}(1 + \frac{\beta}{\alpha - \beta}e^{-\alpha t} - \frac{\alpha}{\alpha - \beta}e^{-\beta t})$	$\frac{1}{s(s + \alpha)(s + \beta)}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{s}{s^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{\omega} \sin \omega t \cdot e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t \cdot e^{-\zeta \omega_n t}$	$\frac{1}{s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2}$
$\cos \omega t \cdot e^{-\alpha t}$	$\frac{s + \alpha}{(s + \alpha)^2 + \omega^2}$
$\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2} + \frac{1}{\omega \sqrt{\alpha^2 + \omega^2}} \sin(\omega t - \varphi) \cdot e^{-\alpha t}, \quad \varphi = -\arctan \frac{\omega}{\alpha}$	$\frac{\omega}{s((s + \alpha)^2 + \omega^2)}$
$\frac{1}{\omega_n^2} - \frac{1}{\omega_n^2 \sqrt{1 - \zeta^2}} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \zeta^2} t + \varphi) \cdot e^{-\zeta \omega_n t}, \quad \varphi = \arccos \zeta$	$\frac{1}{s(s^2 + 2\zeta \omega_n s + \omega_n^2)}$
$\frac{1}{\alpha^2}(\alpha t - 1 + e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{s^2(s + \alpha)}$
$\frac{1}{\alpha^2}(1 - e^{-\alpha t} - \alpha t \cdot e^{-\alpha t})$	$\frac{1}{s(s + \alpha)^2}$

Funkcja wymierna o biegunach jednokrotnych	$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{k=1}^n A_k \frac{1}{s-p_k}, \quad p_i \neq p_j \forall i \neq j,$ $f(t) = \sum_{k=1}^n A_k \cdot e^{p_k t},$ $A_k = \left. \frac{N(s)}{D'(s)} \right _{s=p_k}, \quad k = 1, \dots, n$
Funkcja wymierna o biegunach jednokrotnych i biegunie w zerze	$F(s) = \frac{N(s)}{sD(s)} = \sum_{k=0}^n A_k \frac{1}{s-p_k}, \quad p_i \neq p_j \forall i \neq j,$ $f(t) = \sum_{k=0}^n A_k \cdot e^{p_k t}, \quad p_0 = 0,$ $A_0 = \frac{N(0)}{D(0)}, \quad A_k = \left. \frac{N(s)}{sD'(s)} \right _{s=p_k}, \quad k = 1, \dots, n$
Funkcja wymierna o biegunach wielokrotnych	$F(s) = \frac{N(s)}{D(s)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} A_{ij} \frac{1}{(s-p_i)^j},$ <p><math>p_i</math> – biegun <math>n_i</math> – krotny, <math>i = 1, \dots, n</math>,</p> $f(t) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n_i} \frac{A_{ij}}{(j-1)!} \cdot t^{j-1} \cdot e^{p_i t},$ $A_{ij} = \frac{1}{(n_i-j)!} \cdot \left. \frac{d^{n_i-j}}{ds^{n_i-j}} \frac{N(s)}{D_i(s)} \right _{s=p_i}, \quad j = 1, \dots, n_i$ $D_i(s) = \frac{D(s)}{(s-p_i)^{n_i}}, \quad i = 1, \dots, n.$