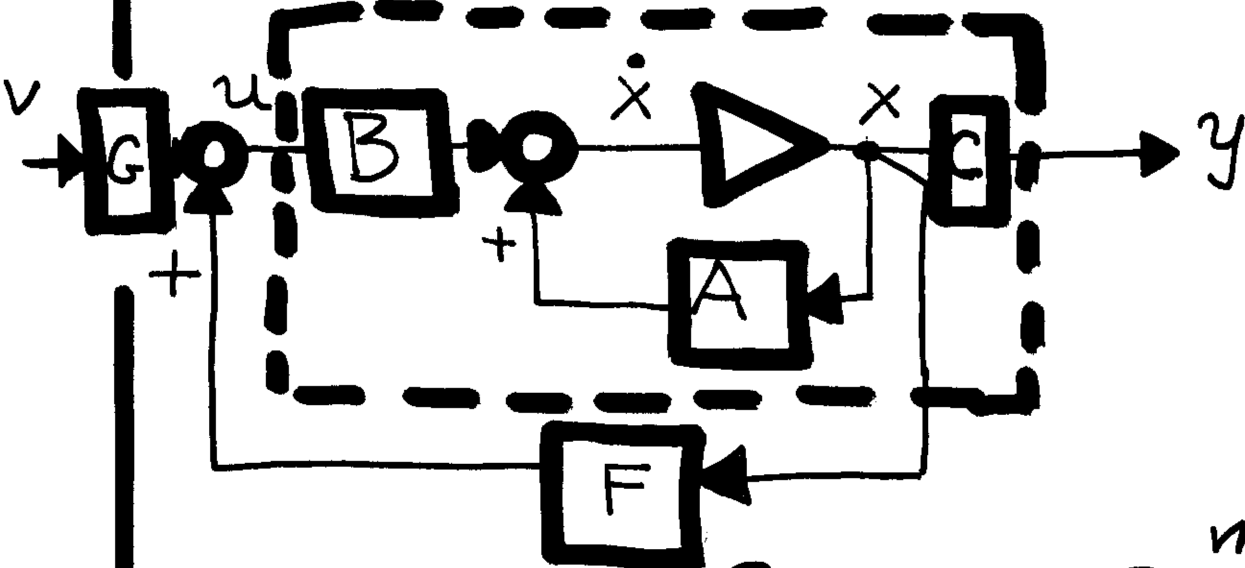
ODSPRZĘGANIE

<u>Obiekt</u>: $\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases}$

$\mathbf{x} \in R^n, \quad \mathbf{u}, \mathbf{y} \in R^m$

$\mathbf{A} \in R^{n \times n}, \quad \mathbf{B} \in R^{n \times m}, \quad \mathbf{C} \in R^{m \times n}$



$\mathbf{F}$ i $\mathbf{G}$ = ? $\quad \mathbf{F} \in R^{m \times n}$

$\mathbf{G} \in R^{m \times m}$

Macierz transmitancji operatorowych $(V(s) \rightarrow Y(s))$:

$$\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A} - \mathbf{BF})^{-1}\mathbf{BG}$$

↑ ma być macierzą <u>diagonalną</u> <u>nieosobliwą</u>

2

(A,B,C) – obiekt jest <u>odsprzęgalny</u> (<u>autonomizowalny</u>) gdy

$$\exists_{\substack{F \in R^{m\times n} \\ G \in R^{m\times m}}} \quad G(s) \text{ jest diagonalna i nieosobliwa}$$

Warunek konieczny i wystarczający dla (A,B,C)-obiektu odsprzęgalnego:

!

$$\det \mathbf{B^*} = \det \begin{bmatrix} c_1^T A^{d_1} B \\ \vdots \\ c_m^T A^{d_m} B \end{bmatrix} \neq 0$$

gdzie

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} c_1^T \\ \vdots \\ c_m^T \end{bmatrix} \leftarrow c_i^T \text{ - i-ty wiersz macierzy } C$$

$c_i^T \in R^{1\times n}$, $i=1,\dots,m$

!

$$\mathbf{d_i} = \begin{cases} \min\{j : c_i A^j B \neq 0 \text{ dla } j = 0,1,\dots,n-1 \\ n-1 \quad \text{jeżeli } c_i A^j B = 0 \text{ dla } j = 0,1,\dots,n-1. \end{cases}$$

wskaźnik odsprzęgalności.

(3) Zatem macierz B^* (pełniąca funkcję macierzy kryterialnej) musi być macierzą o pełnym rzędzie

$$\boxed{\operatorname{rank} B^* = m}$$

Konstruktywna teza wywodu:
Jak znaleźć **F** i **G**, gdy $\det B^* \neq 0$? :

$$\boxed{G = B^{*-1}\Lambda}$$

gdzie $\Lambda \in \mathbb{R}^{m \times m}$ - dowolna nieosobliwa macierz diagonalna

F - każda macierz z $\mathbb{R}^{m \times n}$ spełniająca warunek

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} c_i(A+BF)^{n-1}B \\ c_i(A+BF)^{n-2}B \\ \vdots \\ c_i(A+BF)^{d_i}B \end{bmatrix} = 1, \quad \forall\, i \in [1,m]$$

(4)

Istnieje zatem cała klasa macierzy odsprzęgających F i G

Które zatem wybierać?

jaka jest postać $G(s)$?

w praktyce zaleca się:

$$\boxed{\begin{aligned} F &= F^* = -{B^*}^{-1} A^* \\ G &= G^* = {B^*}^{-1} \end{aligned}}$$

gdzie

$$A^* = \begin{bmatrix} c_1^T A^{d_1+1} \\ c_2^T A^{d_2+1} \\ \vdots \\ c_m^T A^{d_m+1} \end{bmatrix} \qquad A^* \in R^{m \times n} \qquad B^* \in R^{m \times m}$$

Dla $F = F^*$ oraz $G = G^*$ zachodzi

$$G(s) = \operatorname{diag}\left(s^{-(d_i+1)}\right)_{i=1,\dots,m}$$

Pytanie:

Jak zbadać odsprzęgalność obiektu mając jego macierz transmitancji operatorowych $G_p(s)$?

Jeżeli $\exists$ $r_i \in N$, $i = 1, \ldots, m$ takie że macierz

$$\mathbf{R} = \lim_{s \to \infty} \operatorname{diag}(s^{r_i})_{i=1,\ldots,m} G_p(s)$$

ma elementy skończone wówczas zachodzi

$$\boxed{\mathbf{R} = \mathbf{B}^*}$$

ZADANIE (KACZOREK):

$$(A, B, C) \leftarrow \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Indeksy odsprzęgalności:

⑥ $c_1^T = [1\ 1\ 0]$, $c_2^T = [1\ 0\ 1]$

- $c_1^T B = [1\ \ 2] \rightarrow \underline{d_1 = 0}$
- $c_2^T B = [0\ \ 0]$

  $c_2^T A B = [-1\ \ 1] \rightarrow \underline{d_2 = 1}$

- Macierz kryterialna $\mathbf{B^*}$

$$\mathbf{B^*} = \begin{bmatrix} c_1^T B \\ c_2^T A B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

rank $B^* = 2 \rightarrow$ <u>odsprzęgalny!</u>

- Macierze sprzężeń:

$$\mathbf{G^*} = B^{*-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A^*} = \begin{bmatrix} c_1^T A \\ c_2^T A^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 3 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F^*} = -B^{*-1} A^* = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}$$

7

Macierz transmitancji operatorowych układu odsprzężonego:

$$G(s) = C(sI - A - BF^*)^{-1} B G^* =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s+1 & 1 & 3 \\ -1 & s-1 & -3 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix}^{-1} \cdot \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s^2} \end{bmatrix}.$$

Rozważmy teraz transmitancję obiektu (A, B, C):

$$G_p(s) = C(sI - A)^{-1} B =$$

$$\frac{1}{s^3 + 3s^2 + 2s + 1} \begin{bmatrix} s^2 + 4s + 3 & 2s^2 + 6s + 3 \\ -s + 2 & s + 3 \end{bmatrix}$$

Biorąc pod uwagę względne rzędy transmitancji składowych $G_p(s)$ otrzymuje się $r_1 = 1$, $r_2 = 2$

A zatem

$$R = \lim_{s \to \infty} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^2 \end{bmatrix} G_p(s) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = B^*$$

8

ODSPRZĘGANIE + POZYCJONOWANIE BIEGUNÓW

- Dobrać macierze **F** oraz **G** zapewniające
  - macierz $\boxed{G(s) = C(sI - A - BF)^{-1}BG}$
    - nieosobliwą
    - diagonalną
    - o elementach na głównej diagonali

$$\boxed{G(s) = \mathrm{diag}(g_i(s))_{i=1,\ldots,m}}$$

$$\boxed{g_i(s) = \frac{1}{s^{d_i+1} + \sum_{k=0}^{d_i} m_{ki} s^k} \qquad i = 1,\ldots,m}$$

d_i - indeksy odsprzęgalności

m_{ki}, $i = 1,\ldots,m$, $k = 0,\ldots,d_i$ — zadane! wynikają z

<u>rozłożonych pierwiastków równania charakterystycznego po odsprzężeniu</u>:

$$\boxed{\det(sI - A - BF) = 0}$$

Oczywiście zachodzi

$$\deg\left[\det(sI - A - BF)\right] = n$$

(sprzężenie <u>statyczne</u> nie zmienia rzędu modelu), a zatem postawione zadanie można rozwiązać, gdy

$$\boxed{n = m + \sum_{i=1}^{m} d_i}$$

(co jest <u>widoczne</u> po przeanalizowaniu rzędu ~~[illegible]~~ transmitancji $g_i(s)$, $i = 1, \ldots, m$ na głównej diagonali $G(s)$).

? <u>Teraz pytanie: jak dobierać **F** i **G**?</u>

• (A^* i B^* – zgodnie z tym, co ustalono wcześniej)

10

Trzeba utworzyć **dodatkowe macierze odwracające jądowe równanie charakterystyczne**:

$$\mathbf{M}_j = \begin{bmatrix} m_{j1} & & & 0 \\ & m_{j2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & m_{jm} \end{bmatrix} =$$

$$= \mathrm{diag}(m_{ji})_{i=1,\dots,m}$$

$M_j \in R^{m \times m}$

$j = 0, \dots, \max\limits_{i=1,\dots,m} d_i$

$i = 1, \dots,$

Następnie:

$$\boxed{\mathbf{G} = {B^*}^{-1}}$$

$$\boxed{\mathbf{F} = -{B^*}^{-1}\left[\sum_{j=0}^{\max d_i} M_j C A^j + A^*\right]}$$

ZADANIE (KACZOREK)

OBIEKT (A, B, C) poprzednio rozważany

Dobrać F i G, aby pierwiastki równania ch. po korekcji wynosiły $\underline{-2, -3, -4}$.

(11)

ALGORYTM:

1° Obliczamy indeksy odsprzęgalności ($n=3$, $m=2$)

$$d_1 = 0$$
$$d_2 = 1$$

2° Warunek stosowalności metody

$$m + \sum_{i=1}^{m} d_i = 2 + 1 = 3 = \underline{n}$$

O.K.

3°

Można przyjąć:

$$g_1(s) = \frac{1}{s^{d_1+1} + m_{d_1 1} s^{d_1} + \ldots + m_{01}} =$$

$$= \frac{1}{s + m_{01}} \longleftarrow \text{Np.} \ \frac{1}{s+2}$$

$$g_2(s) = \frac{1}{s^{d_2+1} + m_{d_2 2} s^{d_2} + \ldots + m_{02}}$$

$$= \frac{1}{s^2 + m_{12} s + m_{02}}$$

$$\longleftarrow \text{Np.} \ \frac{1}{s^2 + 7s + 12}$$

$(s+3)(s+4)$

(12)

Zatem

$$\begin{cases} m_{01} = 2 & (\text{domyślnie } m_{11}=0) \\ m_{02} = 12 & m_{12} = 7 \end{cases}$$

Co pozwala na wyznaczenie macierzy

$\mathbf{M}_0$ oraz $\mathbf{M}_1 \leftarrow \max\limits_{i=1,\dots,m} d_i$

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} m_{01} & 0 \\ 0 & m_{02} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 12 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_1 = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ 0 & m_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$$

4° Stąd:

$$\sum_{j=0}^{\max d_i} M_j C A^j = M_0 C + M_1 CA = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 5 & -7 & -9 \end{bmatrix}$$

Po dodaniu A^*

$$M_0 C + M_1 CA + A^* = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 8 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

5° Ostatecznie:

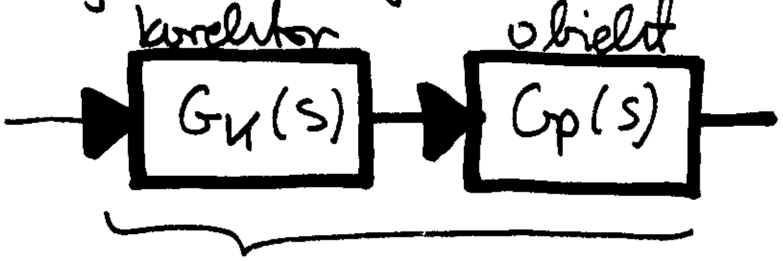
$$\mathbf{F} = -B^{*-1} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 8 & -2 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 14 & -7 & -3 \\ -10 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{G} = B^{*-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

1)

Odsprzęganie

1) Korekcja szeregowa:



G(s) ← żądana postać <u>diagonalna</u> (<u>odsprzężona</u>) macierzy transmitancji

Zatem korektor:

$$G_p(s)G_K(s) = G(s)$$

$$\boxed{G_K(s) = G_p^{-1}(s)G(s)}$$

(Uwaga: istotna <u>kolejności</u> mnożenia (bo rozważamy <u>macierze transmitancji operatorowych</u>)

warunek: <u>$G_p(s)$ musi być odwracalna</u>!

Zadanie:

$$G_p(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+3)} & \frac{1}{(s+1)(s+5)} \\ \frac{1}{(s+4)(s+3)} & \frac{1}{(s+3)(s+5)} \end{bmatrix}$$

2)

Zadana postać macierzy układu po <u>odsprzęgnięciu</u>:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{(s+1)(s+3)(s+4)} & 0 \\ 0 & \frac{1}{(s+3)(s+4)(s+5)} \end{bmatrix}$$

- Sprawdzamy, czy $G_p(s)$ jest odwracalna

$$G_p^{-1}(s) = \begin{bmatrix} (s+4)(s+1)(s+3) & (s+3)^2(s+4) \\ -(s+3)(s+5)(s+1) & (s+3)(s+4)(s+5) \end{bmatrix}$$

$$G_K(s) = G_p^{-1}(s)\, G(s) =$$

$$G_K(s) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-(s+3)}{(s+5)} \\ \frac{-(s+5)}{(s+4)} & 1 \end{bmatrix}$$

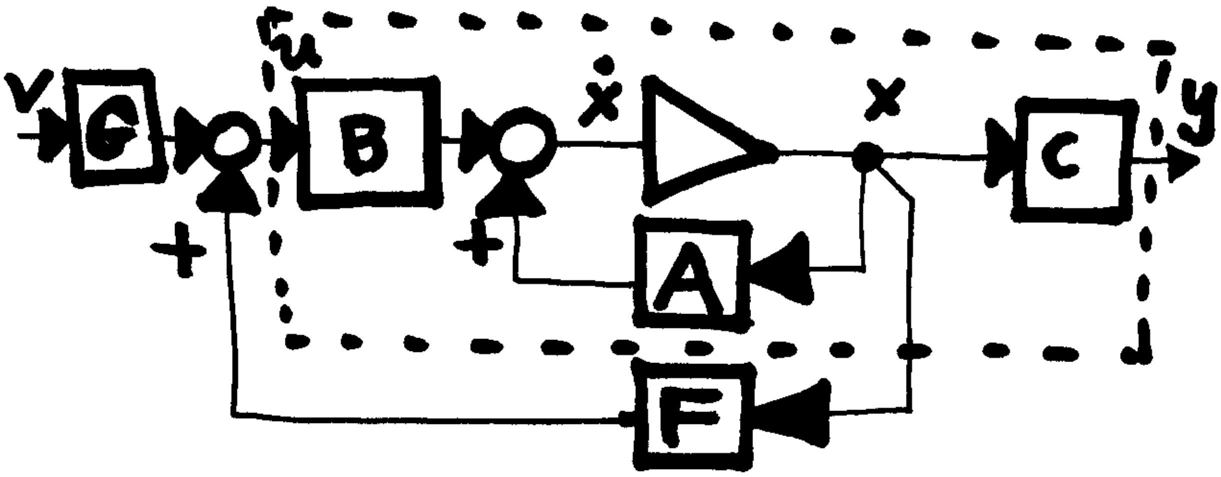
[redacted]

3)

2) Odsprzęganie w oparciu o sprzężenie od stanu:

Obiekt: $\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$

$x \in R^n, \quad u, y \in R^m$



Sterowanie

$$\boxed{u = Fx + Gv}$$

$$\dot{x} = Ax + BFx + BGv$$

$$(sI - A - BF)X(s) = BGV(s)$$

czyli

$$\boxed{G(s) = C(sI - A - BF)^{-1}BG}$$

należy tak dobrać macierze **G** oraz **F**, aby owa macierz transmitancji operatorowych

4) była diagonalna!

Procedura odsprzęgania:

$\mathbb{R}^{m\times n} \ni C = \begin{bmatrix} c_1^T \\ \vdots \\ c_m^T \end{bmatrix}$ $c_i \in \mathbb{R}^n$ - i-ty wiersz macierzy C

- Określenie indeksów $d_i,\ i=1,\dots,m$

$$\boxed{d_i = \min_{j\in\{0,\dots,n-1\}} \{ j : c_i^T A^j B \neq \underbrace{0}_{\text{wektor zerowy}} \}}$$

Uwaga:
jeżeli $c_i^T A^j B = 0 \quad \forall j \in \{0,\dots,n-1\}$
wówczas przyjmuje się $d_i = n-1$

- Utworzenie macierzy kryterialnej

$$\mathbb{R}^{m\times m} \ni B^* = \begin{bmatrix} c_1^T A^{d_1} B \\ \vdots \\ c_m^T A^{d_m} B \end{bmatrix}$$

5)

- Test rozwiązywalności zadania odsprzęgania

$$\boxed{\mathrm{rank}\, B^* = m}$$:

- W przypadku pozytywnego rozstrzygnięcia :

$$\boxed{\begin{aligned} F &= -(B^*)^{-1} A^* \\ G &= (B^*)^{-1} \end{aligned}}$$

gdzie

$$R^{m\times n} \ni A^* = \begin{bmatrix} c_1^T A^{d_1+1} \\ \vdots \\ c_m^T A^{d_m+1} \end{bmatrix}$$

ZADANIE :

Wyznaczyć macierze odsprzęgające **F** oraz **G** następującego MIMO - obiektu sterowania :

(6)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix},\ \mathbf{C}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}c_1^T\\ c_2^T\end{bmatrix}$$

$n=3,\quad m=2$

- Określenie indeksów d_1 i d_2 (zaczynamy od $j=0$)

$c_1^T B = [0\ \ 0],\ j=0$

$c_1^T AB = [1\ \ -1],\ j=1$

$c_2^T B = [1\ \ 1],\ j=0$

Zatem:

$$\boxed{d_1 = 1 \quad d_2 = 0}$$

- Macierz kryterialna $\mathbf{B}^*$:

$$B^* = \begin{bmatrix}c_1^T AB\\ c_2^T B\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$$

- Test odsprzęgalności obiektu:

$\operatorname{rank} B^* \overset{?}{=} 2$ O.K.

-

$$A^* = \begin{bmatrix}c_1 A^2\\ c_2 A\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 3 & -4\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

7)

Zatem:

- $G = (B^*)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$

- $F = -(B^*)^{-1}A^* = \begin{bmatrix} -1,5 & -2,5 & 2 \\ 0,5 & 0,5 & -2 \end{bmatrix}$

(macierze odsprzęgające)

- G(s) jest macierzą 2x2:

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

- **UWAGA:**

macierz odsprzężoną G(s) równe składa się z diagonalnie posadowionych $\boxed{\text{integratorów}}$

$$\boxed{\frac{1}{S^{d_i+1}}}$$

o ile nie występują "skreślenia"

→ oznacza to, że układ po odsprzężeniu ma mody nieobserwowalne → co jest groźne, gdy są niestabilne.