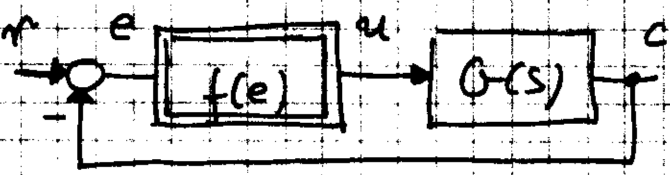
1)

LINEARYZACJA HARMONICZNA.

1. Dany jest układ regulacji



$f(e)$ - charakterystyka statyczna członu nieliniowego

$e(t) = A \sin \omega t$ - pobudzenie harmoniczne członu nieliniowego

$u(t)$ - funkcja okresowa

$f(e(t))$ - spełnia w przedziale długości jednego okresu (→ na całej dziedzinie) warunki Dirichleta (przedziałami monotoniczna, skończona liczba nieciągłości pierwszego rodzaju, regularności na końcach przedziału ← tu oczywiste!) → rozwijalna w szereg Fouriera (trygonometryczny)

$$u(t) = f(e(t)) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\omega t + b_k \sin k\omega t)$$

$\omega = 2\pi / T$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin\varphi)\, d\varphi$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin\varphi) \cos k\varphi \, d\varphi$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(A \sin\varphi) \sin k\varphi \, d\varphi$$

Dalej zakładamy symetrię ch-ki statycznej członu nieliniowego ($\boxed{a_0 = 0}$).

2)

$G(s)$ – filtr dolnoprzepustowy

– tylko składowe odpowiadające pierwszej harmonicznej szeregu $u(t)$ należy uwzględniać z punktu widzenia relacji $\boxed{e \rightarrow c}$.

$$u_1(t) = a_1 \cos \omega t + b_1 \sin \omega t = \sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sin(\omega t + \varphi_0)$$

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \cos \varphi \Rightarrow B_1 \quad b_1$$

$$\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sin \varphi \Rightarrow A_1 \quad a_1$$

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \operatorname{tg} \varphi_0}$$

Zespolona postać pobudzenia:

$$\hat{e} = A e^{j\omega t}$$

zespolona postać "odpowiedzi"

$$\hat{u} = \underbrace{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}}_{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} e^{j\omega t} e^{j\varphi_0}$$

Funkcja opisująca

$$\boxed{J(A) \stackrel{\Delta}{=} \frac{\hat{u}(A)}{\hat{e}(A)} = \frac{B_1 + jA_1}{A}} \qquad \frac{b_1 + ja_1}{A}$$

Z powyższego wynika także, że

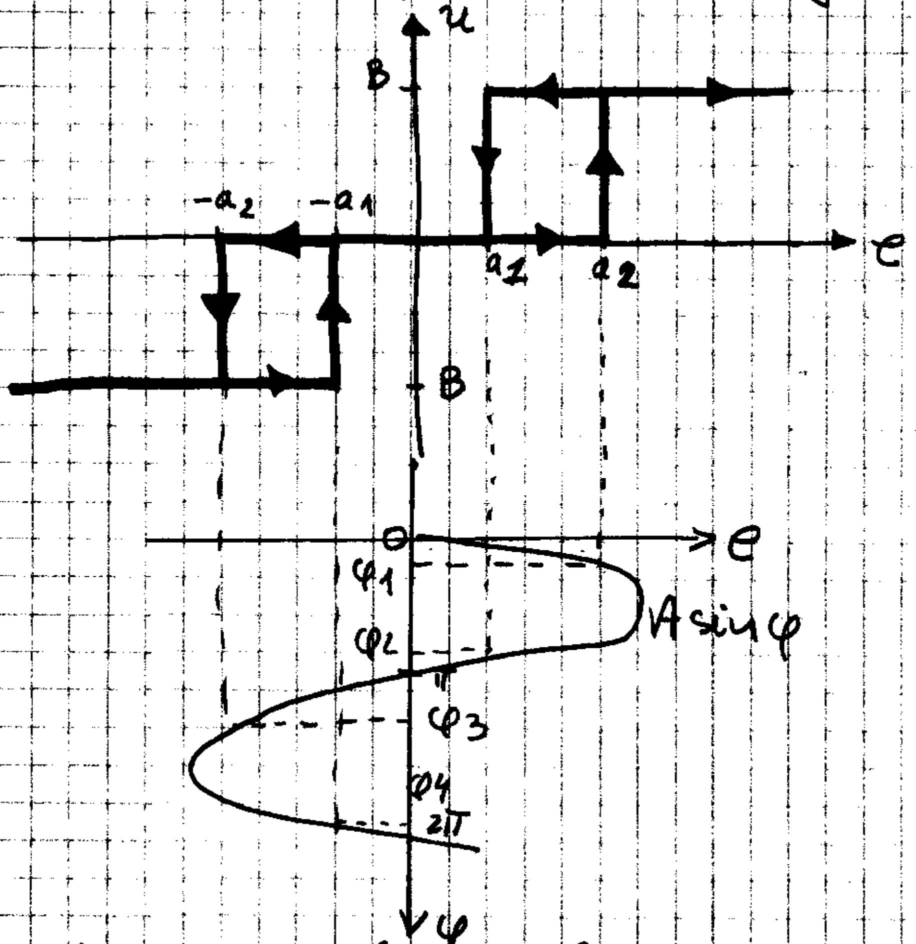
$$\boxed{J(A) = \frac{j}{\pi A} \int_0^{2\pi} f(A \sin \varphi) e^{-j\varphi} d\varphi}$$

wzór wygodny w praktyce

Dla ch-k statycznych jednoznacznych $J(A)$ jest liczbą rzeczywistą

ZADANIE 1

Przekaźnik trójpołożeniowy z histerezą
(symetryczna ch-ka statyczna)



Trzeba prześledzić zachowanie się $f(\overbrace{A\sin\varphi}^{e})$ dla $\varphi \in \langle 0, 2\pi)$:

$$f(e) = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad \varphi \in \langle 0, \varphi_1) \\ B & \text{dla} \quad \varphi \in \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \\ 0 & \text{dla} \quad \varphi \in (\varphi_2, \varphi_3) \\ -B & \text{dla} \quad \varphi \in \langle \varphi_3, \varphi_4 \rangle \\ 0 & \text{dla} \quad \varphi \in (\varphi_4, 2\pi) \end{cases}$$

gdzie

φ_1 : $A \sin\varphi_1 = a_2$

φ_2 : $A \sin\varphi_2 = a_1$

φ_3 : $\pi + \varphi_1$

φ_4 : $\pi + \varphi_2$

4)

Zatem

$$J(A) = \frac{1}{\pi A}\int_0^{2\pi} f(A\sin\varphi)e^{-j\varphi}d\varphi =$$

$$= \frac{1}{\pi A}B\left\{\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} e^{-j\varphi}d\varphi - \int_{\varphi_3}^{\varphi_4} e^{-j\varphi}d\varphi\right\} =$$

$$= \frac{jB}{\pi A}\cdot\frac{1}{(-j)}\left\{ e^{-j\varphi}\Big|_{\varphi_1}^{\varphi_2} - e^{-j\varphi}\Big|_{\varphi_3}^{\varphi_4}\right\} =$$

$$= \frac{-B}{\pi A}\Big\{\cos\varphi_2 - j\sin\varphi_2 - \cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1$$
$$-\cos\varphi_4 + j\sin\varphi_4 + \cos\varphi_3 - j\sin\varphi_3\Big\} =$$

UWAGA na ćwiartki!

$$= -\frac{B}{\pi A}\Big\{\cos\varphi_2 - j\sin\varphi_2 - \cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1$$
$$-\cos(\pi+\varphi_2) + j\sin(\pi+\varphi_2)$$
$$+\cos(\pi+\varphi_1) - j\sin(\pi+\varphi_1)\Big\}$$

$$= \frac{-B}{\pi A}\Big\{\cos\varphi_2 - j\sin\varphi_2 - \cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1$$
$$\cos\varphi_2 - j\sin\varphi_2 - \cos\varphi_1 + j\sin\varphi_1\Big\}$$

$$= \frac{2B}{\pi A}\Big\{(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) + j(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_1)\Big\}$$

Ale

$$\sin\varphi_1 = \frac{a_2}{A} \qquad \sin\varphi_2 = \frac{a_1}{A}$$

$$\cos\varphi_1 = \sqrt{1-\left(\frac{a_2}{A}\right)^2} \qquad \cos\varphi_2 = -\sqrt{1-\left(\frac{a_1}{A}\right)^2}$$

2-go ćwiartka.

Stąd

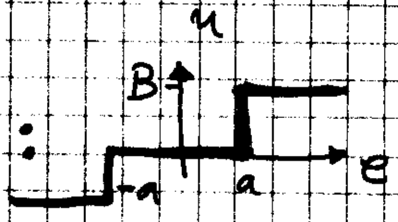
$$\boxed{J(A) = \frac{2B}{\pi A}\left\{\sqrt{1-\left(\frac{a_2}{A}\right)^2} + \sqrt{1-\left(\frac{a_1}{A}\right)^2} + j\left(\frac{a_1-a_2}{A}\right)\right\}} \qquad \boxed{A > a_2}$$

!

- człon jest niejednoznaczny - zatem występuje niezerowa część urojona !

5) Uzyskany wzór pozwala na określenie szeregu przypadków "podrzędnych":

P. trójpołożeniowy bez histerezy:



$a_1 = a_2 = a$

$$\boxed{J(A) = \frac{4B}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}}$$

P. dwupołożeniowy bez histerezy:

$a_1 = a_2 = 0$

$$\boxed{J(A) = \frac{4B}{\pi A}}$$

← warto na tym podumać – prosta o nachyleniu zależnym od amplitudy pobudzenia!

Przekaźnik dwupołożeniowy z histerezą:

$-a_1 = a_2 \ \wedge \ a_1 = -a_2$

stąd

$$\boxed{J(A) = \frac{4B}{\pi A}\left\{\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2} - j\frac{a}{A}\right\}}$$

też niejednoznaczność!

6)

PRZYBLIŻONA ANALIZA UKŁADÓW NIELINIOWYCH W OPARCIU O LINEARYZACJĘ HARMONICZNĄ

w istocie rzeczy chodzi tu o stabilność.

Dla rozważanego układu odwołując się do kryterium Nyquista i traktując funkcję opisującą $J(A)$ jako statyczne wzmocnienie zależne od amplitudy pobudzenia mamy przybliżony! warunek powstania drgań okresowych w układzie zamkniętym

$$\boxed{G(j\omega_0) = -\frac{1}{J(A_0)}}$$

to układ równań "ma" w ogóle A czyli pulsację owych drgań i ich amplitudę.

(bo część rzeczywista i urojona → rozwiązaniem może być tylko para (pary) liczb rzeczywistych i dodatnich ↑

ROZWIĄZANIE ANALITYCZNE: ↑

częściej podejście graficzne:

* wykreślamy $G(j\omega)$ i $-\frac{1}{J(A)}$
* punkt przecięcia owych krzywych

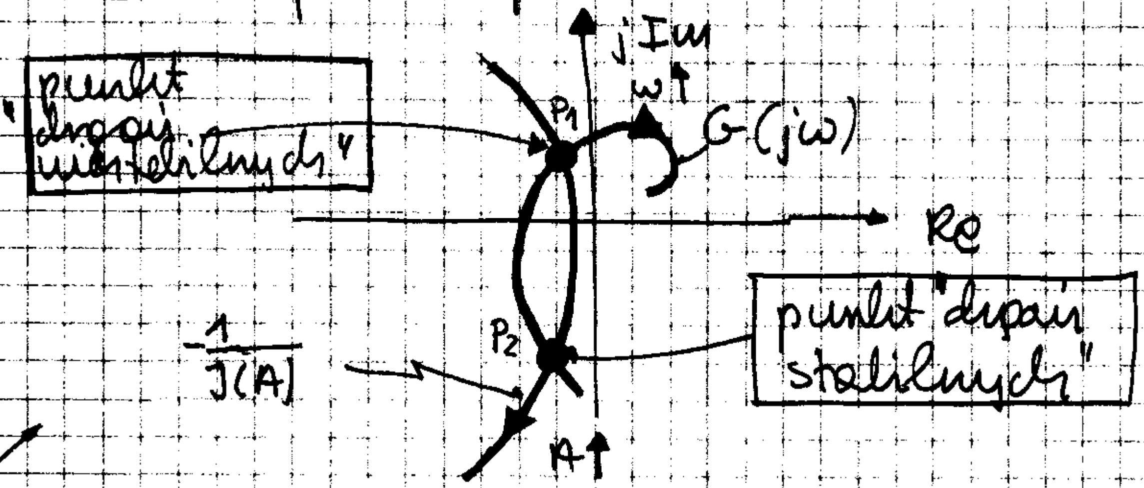
odczyt
- wg $G(j\omega)$ → pulsacja
- wg $-\frac{1}{J(A)}$ → amplituda

drgań

* Dla otwartego układu stabilnego i $\left(G(j\omega), -\frac{1}{J(A)}\right)$ bez przecięć i "objęć" $\left(-\frac{1}{J(A)}\right.$ przez $\left.G(j\omega)\right)$:

- układ zamknięty jest stabilny $\forall A>0$.
- gdy $G(j\omega)$ obejmuje bez reszty $-\frac{1}{J(A)}$ - układ niestabilny dla $\forall A>0$.

Kilka punktów przecięcia:



Łatwo jest to stwierdzić rozważając perturbacyjne zaburzenia ΔA "wokół" owych punktów.

Warto to odnieść do układu regulacji - np. w zadaniu nadążania w normalnym reżimie pracy - uchyb mały (nie większy od tego, który odpowiada punktowi P1) → drgania gasnące jako skutek "zregulowania" uchybu.

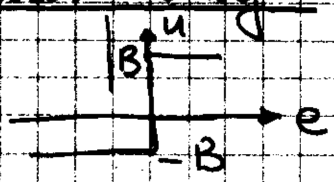
Ale: pojawia się "silne" zakłócenie - uchyb rośnie - wchodzimy do "strefy niestabilnej" → ustalają się drgania niegasnące (pomimo zaniku ~~[illegible]~~ owego zakłócenia!) ← typowy efekt NIELINIOWY.

8)

ZADANIE 2:

Silnik + przekaźnik dwupołożeniowy

$$G_p(s) = \frac{K}{s(1+sT_1)(1+sT_2)}$$



Co się będzie działo - trudno to oczywiście przewidzieć. Możemy wykonać odpowiednie rachunki:

$$J(A) = \frac{4B}{\pi A}$$

$$G_p(j\omega)\cdot J(A) = -1$$ ← stąd równania "na osi urojonej i rzeczywistej"

$$\frac{K \cdot 4B}{\pi A\, j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2)} + 1 = 0$$

$$4BK + \pi A j\omega(1+j\omega T_1)(1+j\omega T_2) = 0$$

$$4BK + \pi A j\omega\left[(1-\omega^2 T_1 T_2) + j\omega(T_1+T_2)\right] = 0$$

$$\begin{cases} 4BK - \pi A\omega^2(T_1+T_2) = 0 & (Re) \\ \pi A\omega(1-\omega^2 T_1 T_2) = 0 & (Im) \end{cases} \Bigg|_{\omega=\omega_0}$$

Stąd pulsacja drgań wynosi

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{T_1 T_2}}$$ ← zależy tylko od filtru liniowego

Zaś

$$\boxed{A = \frac{4BK}{\pi\omega^2(T_1+T_2)} = \frac{4BK\cdot T_1T_2}{\pi(T_1+T_2)}} = \frac{4BK}{\pi\omega_0^2(T_1+T_2)}$$

Zatem w układzie wzbudzą się drgania o pulsacji zależnej od stałych czasowych obiektu i amplitudzie takiej, że:

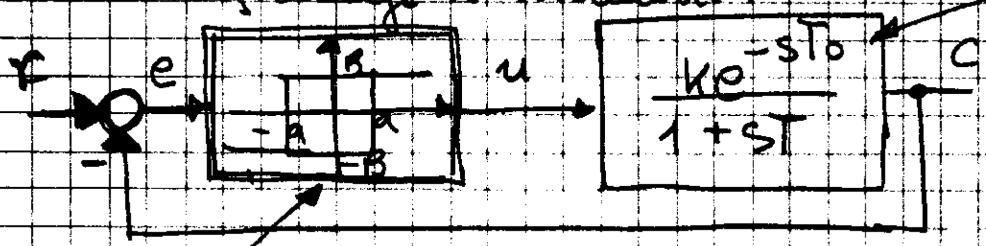
np. $T_2 = const$, $T_1\downarrow$ → $\omega_0\uparrow$, $A\downarrow$

$A\uparrow$ dla $K\uparrow$ i $B\uparrow$

Ale też: $A\downarrow$ dla $\omega_0\uparrow$ co jest oczywiste!

ZADANIE 3:

Co się dzieje w układzie



obiekt inercyjny z opóźnieniem $G_p(s)$

dwupołożeniowy z histerezą

$$J(A) = \frac{4B}{\pi A}\left\{\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2} - j\frac{a}{A}\right\}$$

(trzeba wydzielić część rzeczywistą i urojoną)

$$-\frac{1}{J(A)} = \frac{-\pi A}{4B\left(\sqrt{\cdot} - j\frac{a}{A}\right)} = \frac{-\pi A}{4B}\,\frac{\sqrt{\cdot} + j\left(\frac{a}{A}\right)}{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2+\left(\frac{a}{A}\right)^2} =$$

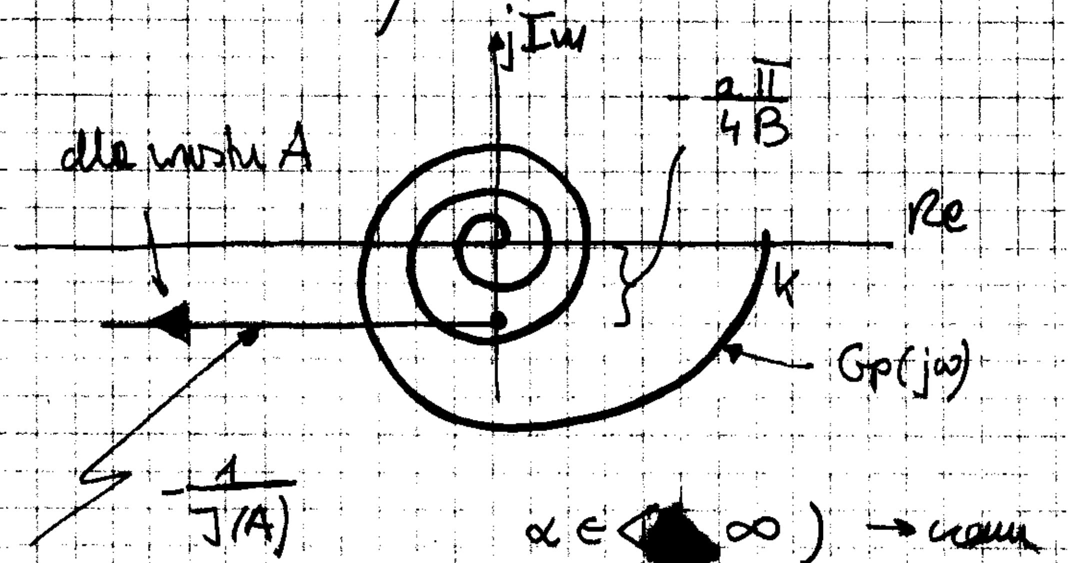
$$= -\left(\frac{\pi A}{4B}\left(\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2} + j\frac{a}{A}\right)\right) =$$

$$= -\frac{a\pi}{4B}\left(\sqrt{\frac{A^2}{a^2}-1} + j\right) = \cancel{-\frac{a\pi}{4B}\left(\sqrt{\frac{A^2}{a^2}\ldots} + j\right)}$$

$$\cancel{= -\frac{a\pi}{4B}\left(\frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha} + j\right)}$$

$$= -\frac{a\pi}{4B}\left(\sqrt{\alpha^2-1} + j\right) \quad \left(\alpha = \frac{A}{a} \geq 1\right)$$

warto o tym pamiętać!



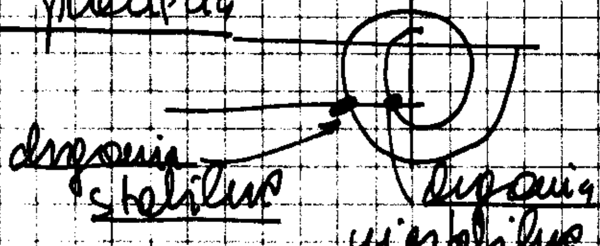
$\alpha \in \langle$ [redacted] $\infty)$ → czemu odpowiada $Re\left(-\frac{1}{J(A)}\right) \in \langle 0, -\infty)$

10)

Z wykresu widzimy:

- jeden punkt przecięcia
  - drgania stabilne

- wiele punktów przecięcia



UWAGA (b. ważne)

- metoda funkcji opisującej jest metodą przybliżoną: np. dla obiektu bez opóźnienia (a tylko całki) drgania miałyby nie występować

$G_p(j\omega)$ nie przechodzi do ~~drugiej~~ trzeciej! ćwiartki

~~w przypadku, gdy drgania występują, mimo że metoda f. opisującej mówi, że ich nie ma~~

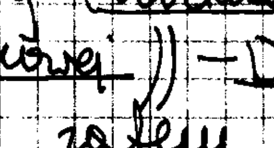
(dalej)

Ale → jak to policzymy (metoda dokładna (np. płaszczyzny fazowej)) - DRGANIA WYSTĄPIĄ! zatem metodzie funkcji opisującej można ufać, gdy mówi, że drgania występują, gdy metoda ta twierdzi, że drgań nie będzie → trzeba być ostrożnym!!

(ale ta metoda w praktyce ograniczona do płaszczyzny fazowej (układy rzędu drugiego)).

ZADANIE 4:

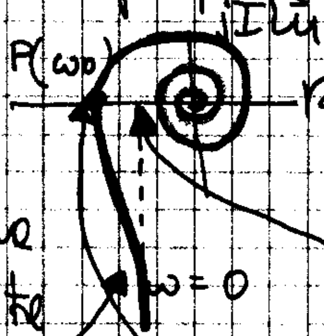
- Przeanalizujmy układ z przekaźnikiem trójpołożeniowym bez histerezy:



wraz z obiektem $\frac{Ke^{-sT_0}}{s(1+sT)} = G_p(s)$

11) Dla jakich K (wzmocnienie statyczne) obiektu układ jest stabilny (nie występują drgania?)

* hodograf obiektu



- obiekt z całkowaniem więc hodograf zaczyna się "w ∞" dla kąta fazowego $-\pi/2$
- musi oczywiście przecinać oś rzeczywistą

$$G_p(j\omega) = \frac{K e^{-j\omega T_0}}{j\omega(1+j\omega T)} \longrightarrow$$

$$\boxed{\measuredangle G_p(j\omega) = -\frac{\pi}{2} - \omega T_0 - \text{arctg}\,\omega T}$$

$$G_p(j\omega) = \frac{-jK(1-j\omega T)e^{-j\omega T_0}}{\omega\sqrt{1+\omega^2 T^2}} \longrightarrow$$ stąd asymptota $\omega \to 0$ $(-KT)$

Obliczmy ω_0 dla której $\measuredangle G_p(j\omega_0) = -\pi$:

$$-\frac{\pi}{2} - \omega_0 T_0 - \text{arctg}\,\omega_0 T = -\pi$$

$$\text{arctg}\,\omega_0 T = \frac{\pi}{2} - \omega_0 T_0$$

$$\omega_0 T = \frac{1}{\text{tg}\,\omega_0 T_0} \longrightarrow$$

$$\boxed{\text{tg}\,\omega_0 T_0 = \frac{1}{\omega_0 T}}$$ ← równanie nieliniowe ale można je tylko iteracyjnie rozwiązać

ω_0 mamy zatem.

Warunkiem stabilności układu jest, aby przebieg $-\frac{1}{J(A)}$ nie przedostał się poza ów punkt, bo

- charakterystyka statyczna części nieliniowej jest jednoznaczna zatem leży ona na osi rzeczywistej! $\left(-\frac{1}{J(A)}\right)$

12)

Punkt P (przecięcie hodografu $G_p(j\omega)$) z osią ujemną dany jest:

$$P(\omega_0) = -1 \cdot |\cdot|_{\omega_0}$$

moduł dla pulsacji ω_0

$$= \frac{-K}{\omega_0\sqrt{1+\omega_0^2T^2}}.$$

Określmy teraz

$$-\frac{1}{J(A)} \leftarrow \quad J(A) = \frac{4B}{\pi A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}$$

$$-\frac{1}{J(A)} = -\frac{\pi A}{4B\sqrt{1-\left(\frac{a}{A}\right)^2}} = -\frac{\pi a}{4B}\,\frac{\frac{A}{a}}{\sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{A}{a}\right)^2}}}$$

$$-\frac{1}{J(A)} = -\frac{1}{N\,J_0(A)}$$

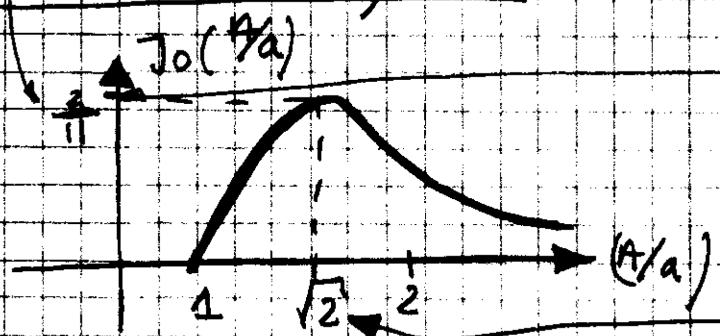
$N = \left(\frac{B}{a}\right)$

tzw. normę przekaźnika (zależy od strefy nieczułości i wysokości wysterowującego obiekt)

znormalizowana funkcja opisująca

$$J_0(A) = \boxed{J_0\left(\frac{A}{a}\right) = \frac{4}{\pi}\,\frac{\sqrt{1-\frac{1}{\left(\frac{A}{a}\right)^2}}}{\left(\frac{A}{a}\right)}}$$

$A \geq a$



$$\frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{2}{\pi}$$

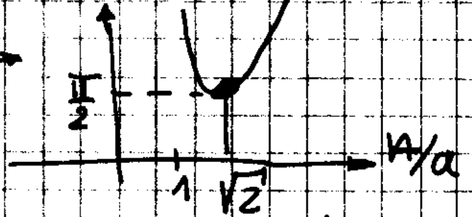
$$J_0\left(\frac{A}{a}\right) = J_0(\alpha) = \frac{4}{\pi}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}$$

$$\alpha = \left(\frac{a}{A}\right) \qquad \frac{\partial J_0(\alpha)}{\partial(\alpha)} = 0 \rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{stąd}$$

(max)

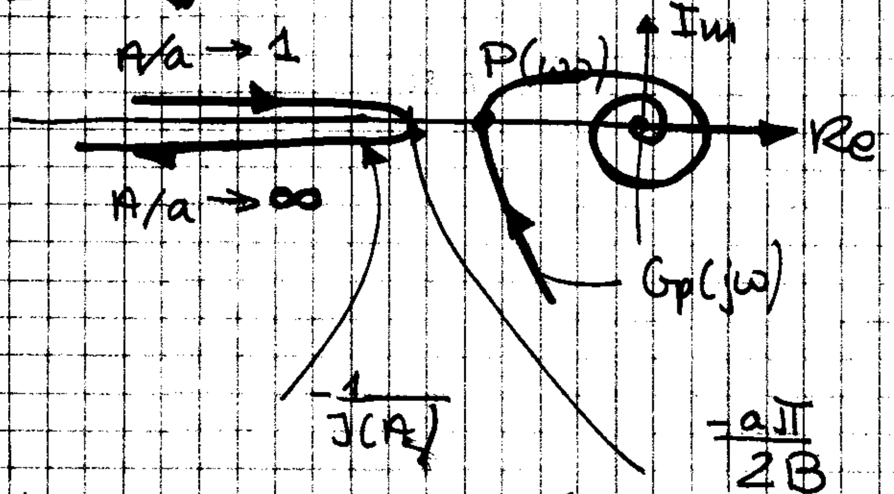
13)

Zatem dla $\frac{1}{J_0(A)}$ →



Wynika stąd, że minimalna wartość $-\frac{1}{J(A)}$ przypada dla $A/a = \sqrt{2}$ i wynosi ona

$$\boxed{-\frac{1}{N}\cdot\frac{\pi}{2} = -\frac{a}{B}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{-a\cdot\pi}{2B}}$$



Zatem warunek stabilności układu prowadzi do wymagania:

$$\boxed{K < K_{max} = \frac{\omega_0\sqrt{1+\omega_0^2T^2}\cdot a\pi}{2B}}$$

K_{max} ↑ gdy ω_0 ↑, a ↑

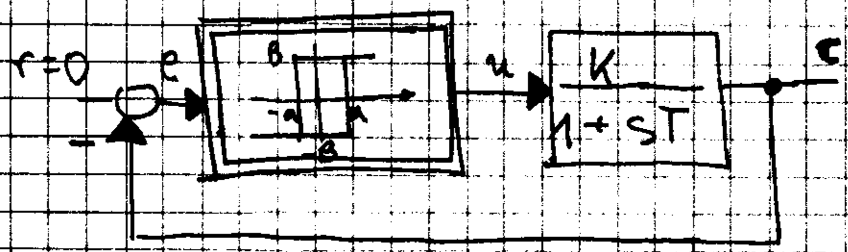
„Opłaca się" zatem zwiększać strefę nieczułości!

ZADANIE 5:

Wróćmy do przypadku obiektu jednoinercyjnego z zadania 3. Metoda ~~fun~~ funkcji opisującej głosi, że w układzie z przekaźnikiem z histerezą drgania harmoniczne nie powstaną. Czy rzeczywiście?

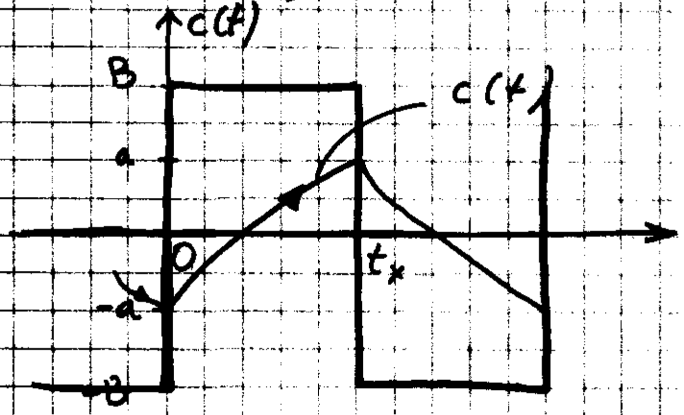
Odpowiedź: drgania powstaną, ale nie są to drgania harmoniczne!

14/



$$e = -c$$

Załóżmy, że w chwili $t=0$ nastąpiło przełączenie z $(-B)$ do $(+B)$, a zatem sygnał $\boxed{e \to a^-}$ czyli $\boxed{c \to -a^+}$



Dla $t \in \langle 0, t_x \rangle$ mamy równanie dynamiki obiektu

$$\begin{cases} \dot{c}T + c = Ku \\ c(0) = -a \end{cases}$$ (← wielkość warunku początkowego)

Rozwiązanie (np. Laplace)

$$(sC(s) - c(0))T + C(s) = KU(s)$$

$$(sT+1)C(s) = c(0)T + KU(s) \qquad U(s) = \frac{B}{s}$$

$$(sT+1)C(s) = -aT + \frac{KB}{s}$$

$$C(s) = \frac{-aT}{1+sT} + \frac{KB}{s(1+sT)} = \frac{-a}{s+\frac{1}{T}} + \frac{KB}{T}\cdot\frac{1}{s(s+\frac{1}{T})}$$

$$c(t) = \left[-ae^{-t/T} + \frac{KB}{T}\left(T - Te^{-t/T}\right)\right]1(t)$$

$$c(t) = -a e^{-t/T} + KB\left(1 - e^{-t/T}\right)$$

$$t \in \langle 0, t_x \rangle$$

Dla $t = t_x$ $c(t) = a$. Stąd

$$-a e^{-t_x/T} + KB\left(1 - e^{-t_x/T}\right) = a$$

$$-a e^{-t_x/T} + KB - KB e^{-t_x/T} = a$$

$$e^{-t_x/T} = \frac{KB - a}{KB + a}$$

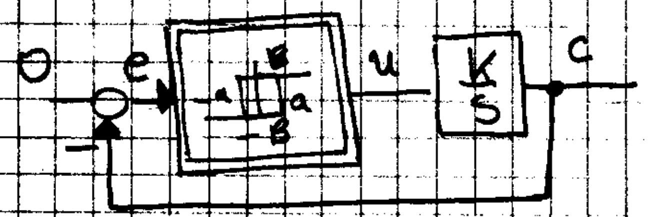
$$\boxed{t_x = T \ln \frac{KB + a}{KB - a}}$$

Okres drgań (ze względu na symetrię) wynosi

$$\boxed{T_0 = 2t_x = 2T \ln \frac{KB + a}{KB - a}}.$$

ZADANIE 6.

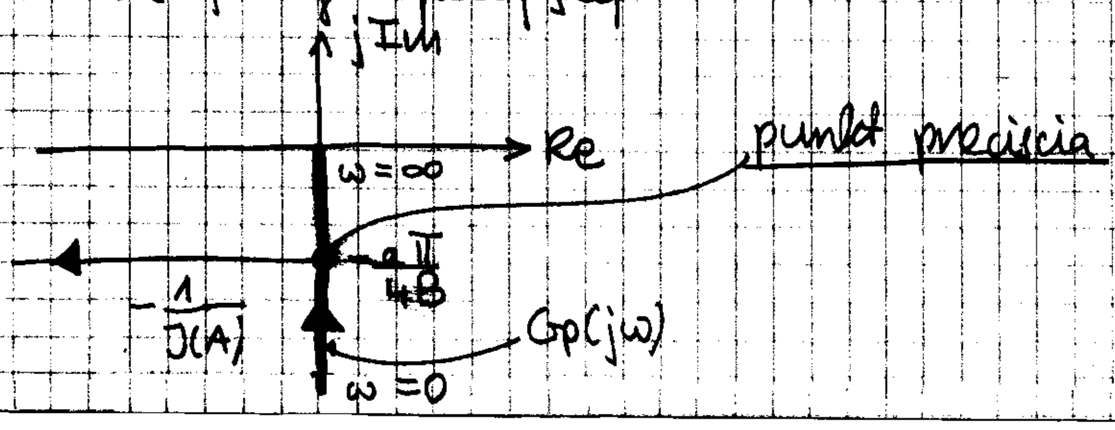
Porównać rozwiązania uzyskane metodą funkcji opisującej oraz metodą bezpośredniego całkowania. Układ ma postać



$$G_p(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

ROZWIĄZANIE

Metoda funkcji opisującej



16)

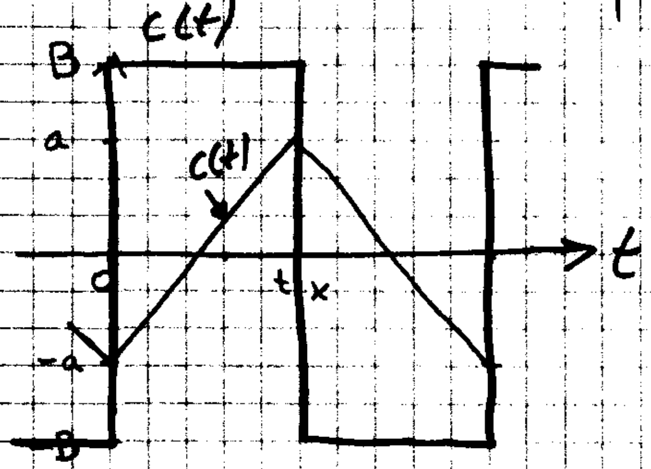
Pulsacja drgań wynika ze wzoru

$$-j\frac{a\pi}{4B} = \frac{K}{j\omega_x} = -j\frac{K}{\omega_x}$$

Czyli $\boxed{\omega_x = \frac{4BK}{a\pi}}$

Amplituda $d = 1 \rightarrow$ amplituda $\boxed{A = a}$

Metoda całkowania bezpośredniego



Dla $t \in \langle 0, t_x \rangle$ na wejściu układu całkującego jest wartość stała B zatem na wyjściu

$$c(t) = -a + k\int_0^t B\,dt = -a + kBt$$

Aż do momentu t_x, w którym to momencie następuje przełączenie $B \rightarrow -B$:

$$c(t)\Big|_{t=t_x} = a \quad \text{zatem}$$

$$-a + kBt_x = a \Rightarrow t_x = \frac{2a}{kB}$$

Zatem okres owych drgań

$$\boxed{T_0 = 2t_x = \frac{4a}{kB}}$$

Stąd pulsacja $\omega_x = \frac{2\pi}{T_0} = \frac{2\pi \cdot kB}{\cancel{4}_{2}\, a} =$

$$\boxed{\omega_x = \frac{kB\pi}{2a}}$$

17) Amplitudy różnią się o czynnik a. ($\sqrt{a}$)

Otrzymano więc zgodne amplitudy, ale odmienne pulsacje

$$\underbrace{\frac{BK}{a}\,\frac{4}{\pi}}_{\approx 1{,}273} \qquad \underbrace{\frac{BK}{a}\,\frac{\pi}{2}}_{\approx 1{,}571}$$

Pewna "zgodność" jest pozorna – przecież w istocie są to różne przebiegi ∿ i ⋀⋀ !!!