0.0.1 Zadania do samodzielnego rozwiązania

Zadanie 1 Analizując rząd macierzy sterowalności, zbadaj sterowalność obiektu dynamicznego opisanego równaniem $\dot{x}(t) = Ax(t)+Bu(t)$, w którym:

a) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 7 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}$

g) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

h) $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Zadanie 2 Dana jest para macierzy (A, B), w której macierz A posiada jednokrotne wartości własne. Przekształcając tę parę w parę podobną $(M^{-1}AM, M^{-1}B)$, gdzie M jest dowolną macierzą diagonalizującą macierz A, sprawdź czy (A, B) jest parą całkowicie sterowalną. Rozważ następujące przypadki:

a) $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\textbf{b)}\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{c)}\qquad A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 5 & -13 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\textbf{d)}\qquad A = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadanie 3 Dane są pary macierzy (A, B):

$$\textbf{a)}\qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix};$$

$$\textbf{b)}\qquad A = \begin{bmatrix} -2 & 1/2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1/2 & -2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\textbf{c)}\qquad A = \begin{bmatrix} -5 & -2 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\textbf{d)}\qquad A = \begin{bmatrix} -7 & -26 & -62 & -116 \\ 17 & 70 & 168 & 314 \\ -16 & -65 & -154 & -286 \\ 5 & 20 & 47 & 87 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Wyznaczając odpowiednie pary podobne $(\bar{A}, \bar{B}) = (M^{-1}AM, M^{-1}B)$, sprawdź, że we wszystkich przypadkach mamy do czynienia z parami (A, B), które nie są całkowicie sterowalne. Następnie, dla każdej pary (A, B) określ przykładową postać sterowalną zdekomponowaną $(\hat{A}, \hat{B}) = (Q_c^{-1}AQ_c, Q_c^{-1}B)$.

Zadanie 4 Obiekt sterowany o jednym wejściu $u(t)$ opisany jest równaniem stanu $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$, gdzie $x(t) \in \mathbb{R}^n$ oznacza wektor stanu. Oblicz wartości własne macierzy stanu tego obiektu $\operatorname{spectr} A$. Następnie, zakładając dostępność wszystkich współrzędnych wektora stanu, wyznacz taki wektor $k \in \mathbb{R}^n$ współczynników sprzężenia zwrotnego $u(t) = -k^T x(t)$, przy którym macierz stanu zamkniętego układu sterowania posiada zadane wartości własne: $\operatorname{spectr}(A - bk^T) = \{\lambda_i\}_{i=1}^n$. Rozważ następujące przypadki:

$$a)\qquad A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \{\lambda_i\}_{i=1}^2 = \{-6, -6\};$$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{\lambda_i\}_{i=1}^{2} = \{-4, -3\};$

c) $A = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \{\lambda_i\}_{i=1}^{2} = \{-10, -5\};$

d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{\lambda_i\}_{i=1}^{2} = \{-2, -2\};$

e) $A = \begin{bmatrix} 2 & -10 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -0.5 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \quad \{\lambda_i\}_{i=1}^{2} = \begin{array}{l} \{-8, -8\}, \\ \{-16, -16\}; \end{array}$

f) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{\lambda_i\}_{i=1}^{2} = \{-0.5 \pm j1.32\};$

g) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \{\lambda_i\}_{i=1}^{2} = \{-3, -2\};$

h) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3.5 & 3.5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \{\lambda_i\}_{i=1}^{3} = \{-2, -1, -0.5\};$

i) $A = \begin{bmatrix} -13 & -5 & 11 \\ -12 & -8 & 12 \\ -21 & -9 & 19 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \{\lambda_i\}_{i=1}^{3} = \{-8, -8, -8\};$

j) $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \{\lambda_i\}_{i=1}^{3} = \{-5, -5, -4\};$

k) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 6 & -11 & 6 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \{\lambda_i\}_{i=1}^{3} = \begin{array}{l} \{-5, -4, -3\}, \\ \{-10, -8, -6\}; \end{array}$

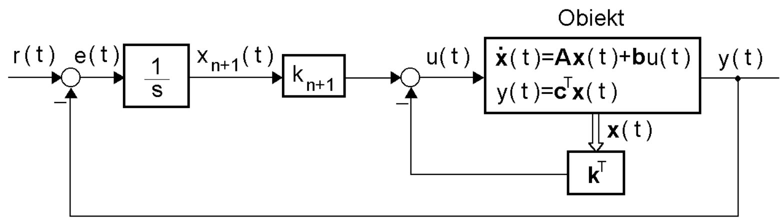
l) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 & -2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$

$\{\lambda_i\}_{i=1}^{4} = \{-5, -5, -4, -4\}.$

Zadanie rozwiąż dowolną ze znanych metod.

Zadanie 5 Obiekt dynamiczny opisany równaniami $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ oraz $y(t) = c^T x(t)$ sterowany jest w układzie zamkniętym pokazanym na rys. 1, zachodzi przy tym: $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $b \in \mathbb{R}^n$ oraz $c \in \mathbb{R}^n$. Oszacuj współrzędne wektora $\bar{k} = [\ k^T \quad -k_{n+1}\ ]^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ nastawialnych parametrów, które zapewniają macierzy stanu tego układu założone wartości własne $\{\lambda_i\}_{i=1}^{n+1}$.

Wyznacz operatorową transmitancję $G_{ry}(s) = Y(s)/R(s)$ tak uzyskanego układu sterowania.



Rysunek 1: Strukturalny schemat układu sterowania.

Zadanie obejmuje następujące przypadki:

a) $$A = \begin{bmatrix} -0.5 & -4.5 \\ 0.5 & -3.5 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 0.0 \end{bmatrix},$$
$$\{\lambda_i\}_{i=1}^{3} = \{-2.0, -2.0, -2.0\};$$

b) $$A = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ -3.0 & -4.0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix},$$
$$\{\lambda_i\}_{i=1}^{3} = \{-4.0, -4.0, -4.0\};$$

c) $$A = \begin{bmatrix} 0.0 & 1.0 \\ 2.0 & 1.0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 0.0 \end{bmatrix},$$
$$\{\lambda_i\}_{i=1}^{3} = \{-3.0, -3.0, -3.0\};$$

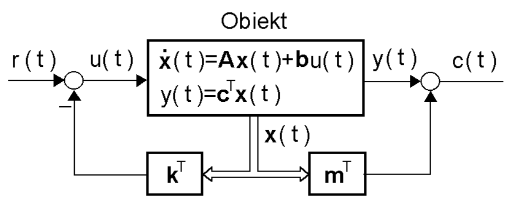
d) $$A = \begin{bmatrix} 1.0 & -2.0 \\ 0.0 & -2.0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 3.0 \end{bmatrix},$$
$$\{\lambda_i\}_{i=1}^{3} = \{-4.0, -2.0, -2.0\};$$

e) $$A = \begin{bmatrix} -1.0 & -2.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix},$$
$$\{\lambda_i\}_{i=1}^{3} = \{-6.0, -6.0, -4.0, -4.0\};$$

f) $$A = \begin{bmatrix} -0.5 & -0.5 & -1.0 \\ -0.5 & -1.0 & 0.5 \\ -0.5 & -0.5 & -1.0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1.0 \\ -2.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 2.0 \\ 2.0 \end{bmatrix},$$
$$\{\lambda_i\}_{i=1}^{3} = \{-4.0, -4.0, -3.0, -2.0\}.$$

Zadanie 6 Obiekt dynamiczny opisany równaniami $\dot{x}(t) = Ax(t) + bu(t)$ oraz $y(t) = c^T x(t)$ sterowany jest w układzie zamkniętym pokazanym na rys.

2. Wyznacz współrzędne wektorów k oraz m, które zapewnią temu układowi wymaganą postać operatorowej transmitancji $G_{rc}(s) = C(s)/R(s)$.



Rysunek 2: Strukturalny schemat układu sterowania.

Obliczenia przeprowadź dla następujących przypadków:

a) $$A = \begin{bmatrix} -1.0 & -5.0 & -2.0 \\ -1.0 & -1.0 & -2.0 \\ -3.0 & -5.0 & 0.0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ -1.0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{2(10+s)^2}{(4+s)(5+s)(6+s)};$$

b) $$A = \begin{bmatrix} 27.0 & -26.0 & -18.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.0 \\ 27.0 & -27.0 & -18.0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} -9.0 \\ 0.0 \\ 10.0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{216}{(6+s)^3};$$

c) $$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.0 & 0.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -3.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 & 3.0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 2.0 \\ 0.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 1.0 \\ 1.0 \\ -1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{40(5+s)^2}{(4+s)^2(8+s)^2};$$

d) $$A = \begin{bmatrix} 1.0 & 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -1.0 & 2.0 & 1.0 \\ 0.0 & 0.0 & -3.0 & 0.0 \\ 1.0 & 0.0 & 0.0 & 3.0 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} -1.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix}, \quad c = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 1.0 \\ 1.0 \\ 0.0 \end{bmatrix},$$

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{25(10+s)^2}{(5+s)^2(10+s)^2} = \frac{25}{(5+s)^2}.$$

PJSuchomski