STABILNOŚĆ

1. STABILNOŚĆ PUNKTU RÓWNOWAGI → $\dot{x} = 0$

$$\dot{x} = F(x) \quad x(t_0) = x_0$$

$x_0 = 0$ jest stabilnym punktem równowagi

$$\boxed{\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{\delta > 0} \; \forall_{x_0 \in \overline{K(0,\delta)}} \; \forall_{t > t_0} \; x(t) \in \overline{K(0,\varepsilon)}}$$

Uwaga $\delta(\varepsilon)$ to oczywiste ale może być $\delta(\varepsilon, \underline{t_0})$

- założono, że wytrącenie z punktu równowagi miało miejsce w chwili $t_0 (=0)$

Kule determinowane są metryką danej przestrzeni sygnałowej (wektorowej)

Jeżeli $\boxed{\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \; (= x_0)}$ – punkt równowagi jest stabilny asymptotycznie.

Powyższa definicja odnosi się do stabilności lokalnej (ε). Jeżeli warunki początkowe mogą być dowolnie „duże" → stabilność globalna.

2. Układy liniowe

- $\dot{x} = Ax$ $\quad x = 0$ jest punktem równowagi stabilnym asymptotycznie, gdy $\boxed{\mathrm{Re}\,\lambda_i < 0, \; \forall \lambda_i \in \mathrm{spectr}\,A}$.

Jest to stabilność globalna

3. PIERWSZA METODA LAPUNOWA:

- ocena o stabilności lokalnej w punkcie równowagi $x=0$ dla układu $\dot{x}=F(x)$ na podstawie modelu liniowego $\dot{x}=Ax$ gdzie $A=\nabla_x F|_{x=0}$ ← : macierz Jacobiego odpowiednia F

- układ nieliniowy jest stabilny lokalnie asymptotycznie w $x=0$, jeżeli A jest macierzą silnie stabilną (model liniowy jest stabilny asymptotycznie);
- model liniowy niestabilny → układ nieliniowy niestabilny (punkt równowagi);
- model liniowy stabilny ale nie asymptotycznie → niczego nie można wnosić o modelu nieliniowym.

4. PRZYKŁAD 1:

Równanie $\ddot{x}+a\dot{x}+x+b(\dot{x})^3=0$

Przyjmujmy $\underline{x}=\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$, punkt równowagi $\underline{x}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$\dot{\underline{x}}=\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_2 \\ -a x_2 - x_1 - b x_2^3 \end{bmatrix} \qquad \underline{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \end{bmatrix}$$

$$=\underline{F}(\underline{x})=\begin{bmatrix} f_1(\underline{x}) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

Macierz Jacobiego

$$\nabla_x F=\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a-3bx_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_x F|_{\underline{x}=0}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix}.$$

c) Równanie charakterystyczne

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda & -1 \\ 1 & \lambda + a \end{vmatrix} = \lambda^2 + a\lambda + 1$$

gdzie $A = \nabla_x F|_{x=0}$

Stąd, jeżeli $a > 0$ układ nieliniowy w punkcie równowagi jest stabilny lokalnie asymptotycznie

5. DRUGA METODA LAPUNOWA

wystarczające

→ warunki wystarczające stabilności oraz stabilności asymptotycznej w obszarze (także obszarze nieograniczonym)

$\mathcal{D}$ - obszar zawierający początek układu współrzędnych, (← bo tam jest punkt równowagi).

$V : \mathbb{R}^n \ni x \to V(x) \in \mathbb{R}$

pewna funkcja wektora stanu

- $V(x)$ - dodatnio określona, gdy $x \in \mathcal{D}$

$$\boxed{V(x) > 0 \quad \forall_{x \neq 0} \quad \wedge \quad V(0) = 0}$$

(ujemnie określona)

$$\boxed{V(x) < 0 \quad \forall_{x \neq 0} \quad \wedge \quad V(0) = 0}$$

- $V(x)$ - dodatnio półokreślona (nieujemnie określona)

$$V(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}$$

- ujemnie półokreślona (niedodatnio określona)

$$V(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

4)

- Niech $V \in C^1_D$ (różniczkowalna w sposób ciągły w obszarze D)

$V(x)$ jest funkcją Lapunowa, gdy

(i) x (argument funkcji) jest rozwiązaniem równania stanu $F(x) = \dot{x}$

(ii) $V(x)$ jest dodatnio określona dla $x \in D$

(iii) $\lim V(x) = \infty$ dla $\|x\| \to \infty$.

- System nieliniowy $\dot{x} = F(x)$ jest stabilny asymptotycznie w D jeśli można znaleźć (istnieje) funkcja Lapunowa dla położeń stanu tego systemu i $\dot{V}(x) < 0$

- gdy $\dot{V}(x)$ jest ujemnie półokreślona → układ nieliniowy jest stabilny w D, ale nie musi być stabilny asymptotycznie (np. zmienne stanu pozostają ograniczone).

Problem polega oczywiście na znalezieniu (przyjęciu) odpowiedniej funkcji Lapunowa. (z tego, iż "jakaś" funkcja V nie spełnia powyższych warunków nie wynika jeszcze, że układ jest niestabilny !!! - może przecież istnieć inna odpowiednia funkcja ...).

6. Dygresja : układy liniowe :

$\dot{x} = Ax$ ← jako funkcję Lapunowa proponuje się dodatnio

5) Określony formę kwadratową $V(x)$

$$V(x) = x^T L x \quad , L \in \mathbb{R}^{n\times n}$$ – syme-

tw. Sylwestera ! ← tryczne dodatnio

określone

$$\dot{V}(x) = \dot{x}^T L x + x^T L \dot{x} =$$
$$= x^T A^T L x + x^T L A x =$$
$$= x^T (\underbrace{A^T L + L A}_{-Q}) x = - x^T Q x$$

⊛ $\boxed{-Q = A^T L + LA}$ ← tzw. równanie Lapunowa.

Układ liniowy będzie stabilny jeżeli istnieje taka symetryczna dodatnio określona Q ($Q>0$) oraz symetryczne dodatnio określone L ($L>0$) że zachodzi ⊛.

(W zasadzie należałoby mówić o macierzach hermitowskich). → ($T \leftrightarrow *$) → H

Dla układów liniowych można powiedzieć więcej $\Longleftrightarrow$:

($x=0$ jest stabilny asymptotycznie) $\Longleftrightarrow$ dla danej dowolnej $Q>0$ istnieje $L>0$ taka że spełnione jest równanie Lapunowa ⊛

(Można jako Q – przyjmować macierz jednostkowe)

Równanie Lapunowa $n(n+1)/2$ równań liniowych, rozwiązanie jednoznaczne, gdy $\lambda_i + \lambda_k \neq 0$, $\lambda_i, \lambda_k \in$ spectr A.

6) PRZYKŁAD 2:

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} x \qquad x = 0 \leftarrow \text{punkt równowagi}$$

Równanie Lapunowa

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -p_{11} + p_{12} + (-p_{11}) + p_{12} = -1 \\ -p_{12} + p_{22} + (-2p_{11}) - 4p_{12} = 0 \\ -2p_{12} - 4p_{22} - 2p_{12} - 4p_{22} = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2p_{11} + 2p_{12} = -1 \\ -2p_{11} - 5p_{12} + p_{22} = 0 \\ -4p_{12} - 8p_{22} = -1 \end{cases} \rightarrow \quad p_{11} = \frac{23}{60} \quad p_{12} = -\frac{7}{60} \quad p_{22} = \frac{11}{60}$$

$$P = \frac{1}{60}\begin{bmatrix} 23 & -7 \\ -7 & 11 \end{bmatrix}$$

$\det P > 0$ zatem jest to macierz dodatnio określona, układ jest stabilny asymptotycznie.

7. Wróćmy do układów nieliniowych

* dla układów liniowych punkt równowagi stabilny asymptotycznie lokalnie jest też stabilny asymptotycznie globalnie
* dla układów nieliniowych punkt równowagi może być stabilny asymptotycznie lokalnie, a nie być stabilny globalnie
* wnioski z pierwszej metody Lapunowa dotyczą tylko otoczenia punktu równowagi (lub punktów, gdy jest ich więcej – każdy badamy osobno!) mają zatem -

<u>warunek lokalny</u> - czy trajektoria dla $t \to \infty$ nie opuszcza <u>pewnego otoczenia punktu równowagi</u>. Metoda ta nie określa o promieniu kuli, w której musi znaleźć się zaburzenie, aby $x(t) \to 0$

(Problem <u>krytycznego przypadku</u> - gdy własności <u>stabilności lokalnej</u> nie są określone przez przybliżenie liniowe (wartości własne macierzy jakobianowej mają zerowe części rzeczywiste).

* funkcję Lapunowa ~~to~~ można interpretować jako "uogólnioną" energię układu (w miarę ewolucji stanu układu autonomicznego energia ta maleje i osiąga minimum w stabilnym asymptotycznie punkcie równowagi).

* druga metoda L. jest <u>metodą dokładną</u>

* <u>UWAGA</u>: $\dot{V}(x)$ - <u>pochodna czasowa</u> <u>funkcji</u> $V(x)$ <u>wzdłuż trajektorii stanu</u>

zatem $V(x,t)$ (dla zapewnienia stabilności powinna być <u>malejącą funkcją czasu</u>)

- <u>energia</u> w sensie "dosłownym" nie jest funkcją Lapunowa np. <u>średnia energia maleje</u> → układ stabilny, ale <u>średnio</u> nie znany w <u>której chwili</u> !!!
- funkcja Lapunowa <u>nie jest jednoznaczna</u>

8)

* jeszcze inne ujęcia: stabilność absolutna - asymptotyczna stabilność globalna ≠ to. zwarty S - obszarze ograniczonym; stabilność orbitalna - po zaburzeniu wraca się do cyklu granicznego.

- metoda funkcji Lapunowa prowadzi do warunków wystarczających stabilności ale niekoniecznych.
- z tego, że x_0 jest punktem równowagi stabilnej dla pewnego obszaru ($x_0 \in D$) nie wynika że poza tym obszarem ruch układu odpowiada trajektorii niestabilnej.
- Jeszcze terminologia
  * nieliniowy układ stabilny globalnie to znaczy stabilność asymptotyczna globalna (co implikuje że istnieje tylko jeden punkt równowagi!)
- stabilność słaba - to stabilność punktu równowagi ale nie asymptotyczna; w praktyce żąda się zwykle stabilności asymptotycznej poszukując obszaru stabilności asymptotycznej (ruch rozpoczynający się w takim obszarze będzie zmierzał do punktu równowagi dla $t \to \infty$).
- gdy $\delta(\varepsilon)$, ale nie zależy od t_0, mówi się o jednostajnie stabilnym punkcie równowagi.
- Ograniczoność rozwiązań równania $\dot{x} = F(x)$

x_e jest rozwiązaniem ustalonym jest ono ograniczonym jeżeli:

9)

$$\forall_{\delta>0} \; \exists_{\varepsilon(\delta, t_0)} \; \forall_{x_0 \in K(x_e, \delta)} \; \forall_{t \geq t_0} \; x(t) \in \overline{K(x_e, \varepsilon)}$$

Gdy $\varepsilon(\delta)$, a nie zależy od t_0 – mówimy o ograniczoności jednostajnej

8. Twierdzenia o warunkach kryteriów praktycznych : (dla punktu równowagi $x=0$)

- Jeżeli $\exists \; V(x,t) \in C^1_{(\Omega, \forall t)}$ taka, że:

$$(i) \begin{cases} V(x,t) > 0 & \forall_{\Omega \ni x \neq 0}, \forall t \\ V(0,t) = 0 & \forall t \end{cases}$$

$$(ii) \begin{cases} \dot{V}(x,t) < 0 & \forall \, \Omega \ni x \neq 0, \forall t \\ \dot{V}(0,t) = 0 & \forall t \end{cases}$$

to punkt $x=0$ jest stabilny jednostajnie asymptotycznie w Ω (Ω może być "całą" przestrzenią.

- Zbiór inwariantny $I_X \subset X$ ← przestrzeń stanów ($\dot{x} = Fx$)

$$\boxed{\mathbb{R}^n \supset X \supset I_X = \{ v \in X : x(t_0) = v \rightarrow x(t) \in I_X, \forall t \geq t_0 \}}$$

a zatem, jeżeli trajektoria stanu zaczyna się w punkcie należącym do I_X to ewolucja stanu przebiega tak że trajektoria stanu pozostaje w owym zbiorze $\forall t > t_0$.

W dalszych rozważaniach I_X oznacza topologicznie maksymalny zbiór inwariantny.

10)

- Jeżeli $\exists\, V(x,t) \in C^1_{(\Omega, \forall t)}$ taka, że

(i) $\begin{cases} V(x,t) > 0, \forall\, \Omega \ni x \neq 0, \; \forall t \\ V(0,t) = 0, \; \forall t \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} \dot V(x,t) \leqslant 0, \; \forall\, \Omega \ni x \neq 0, \; \forall t \\ \dot V(0,t) = 0, \; \forall t \end{cases}$

wtedy x, ograniczone dla $\forall t$, dąży do I_x dla $t \to \infty$.

Jeżeli ponadto $V(x,t) \to \infty$ gdy $\|x\| \to \infty$ to każde rozwiązanie x jest ograniczone dla $\forall_t$, a zatem dąży do I_x gdy $t \to \infty$

Przypominam, x jest rozwiązaniem $\dot x = F(x)$!

$\forall_t$ oznacza tu $t \geqslant 0$!

Uwaga: co to znaczy x dąży do I_x, $t \to \infty$

$$(x \xrightarrow[t\to\infty]{} I_x) \iff \underset{\varepsilon > 0}{\forall}\; \underset{\substack{t_0 > 0 \\ t_0(\varepsilon)}}{\exists}\; \underset{\substack{v \in I_x \\ v(\varepsilon)}}{\exists}\; \underset{t > t_0}{\forall}\; \|x(t) - v\| < \varepsilon$$

$x(t) \in K(v, \varepsilon)$

- Jeżeli $\exists\, V(x,t) \in C^1_{(\Omega, \forall t)}$ taka, że

(i) $\begin{cases} V(x,t) > 0, \; \forall\, \Omega \ni x \neq 0, \; \forall t \\ V(0,t) = 0, \; \forall t \end{cases}$

(ii) $\begin{cases} \dot V(x,t) \leqslant 0, \; \forall\, \Omega \ni x \neq 0, \; \forall t \\ \dot V(0,t) = 0, \; \forall t \end{cases}$

to $x = 0$ jest stabilny jednostajnie (ale, oczywiście, niekoniecznie stabilny asymptotycznie, np. może wystąpić cykl graniczny o czym mówi poprzednie twierdzenie)

11) • Wreszcie niestabilność układu

Jeżeli $\exists\ V(x,t) \in C^1_{(\Omega, \forall t)}$ taka, że

$V(x,t)$ jest określona (w Ω!)

$\dot{V}(x,t)$ jest określona } i jest to ten

sam typ określoności (ścisłej!) to

$x=0$ jest punktem niestabilnym.

9. $\boxed{\text{Jak tworzyć funkcje Lapunowa – oto jest pytanie}}$. Istnieje wiele metod (np. niektóre dostosowane do równań różniczkowych określonego typu).

Metoda Krasowskiego (wersja uproszczona) (mówimy o punkcie równowagi $x=0$, a może być ich wiele!).

Niech $\dot{x} = f(x)$, $f \in C^1$, $f(0)=0$

Niech $\nabla_x f \in C^{n \times n}$ ($x \in C^n$ (w ogólnym przypadku)) będzie macierzą jakobianową

Jeżeli

$$\boxed{\nabla_x f + (\nabla_x f)^H}$$ jest (*) sprzężone transponowanie (sprzężenie hermitowskie)

ujemnie określona to $x=0$ jest stabilny asymptotycznie

(H) inne oznaczenie

gdy $\|f(x)\|_2 = f^*(x) f(x) \Rightarrow \infty$ dla $\|x\| \to \infty$, to punkt równowagi jest stabilny globalnie.

Funkcja Lapunowa ma teraz postać

$$V(x) = f^*(x) f(x).$$

(można uogólnić $V(x) = f^*(x) A f(x)$) $A>0$

$\dot{V}(x)$

$$\boxed{\nabla_x^T f A + A \nabla_x f < 0}$$

12) 10. Przypominamy warunki Sylvestera dla ujemnej określoności macierzy (formy kwadratowej) z macierzami symetrycznymi (Kermitowskimi)

- wyznacznik macierzy
  - dodatni dla n parzystego
  - ujemny dla n nieparzystego
- kolejne minory główne stopnia parzystego dodatnie, stopnia nieparzystego – ujemne.

11. PRZYKŁAD 3:

Dany jest układ $\dot{x} = f(x)$ i punkt równowagi $x = 0$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3x_1 + x_2 \\ x_1 - x_2 - x_2^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{bmatrix}$$

Czy punkt ten jest stabilny?

ROZWIĄZANIE:

Macierz jakobianowa:

$$\nabla_x f = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 1 & -1-3x_2^2 \end{bmatrix}$$

$$\nabla_x f + (\nabla_x f)^T = \begin{bmatrix} -6 & 2 \\ 2 & -2-6x_2^2 \end{bmatrix}$$

<0 $\qquad \det(\cdot) = 8 + 36x_2^2 > 0 \ \forall x_2$

Stąd macierz $\nabla_x f + (\nabla_x f)^T$ jest ujemnie określona

$\Rightarrow x = 0$ stabilny asymptotycznie.

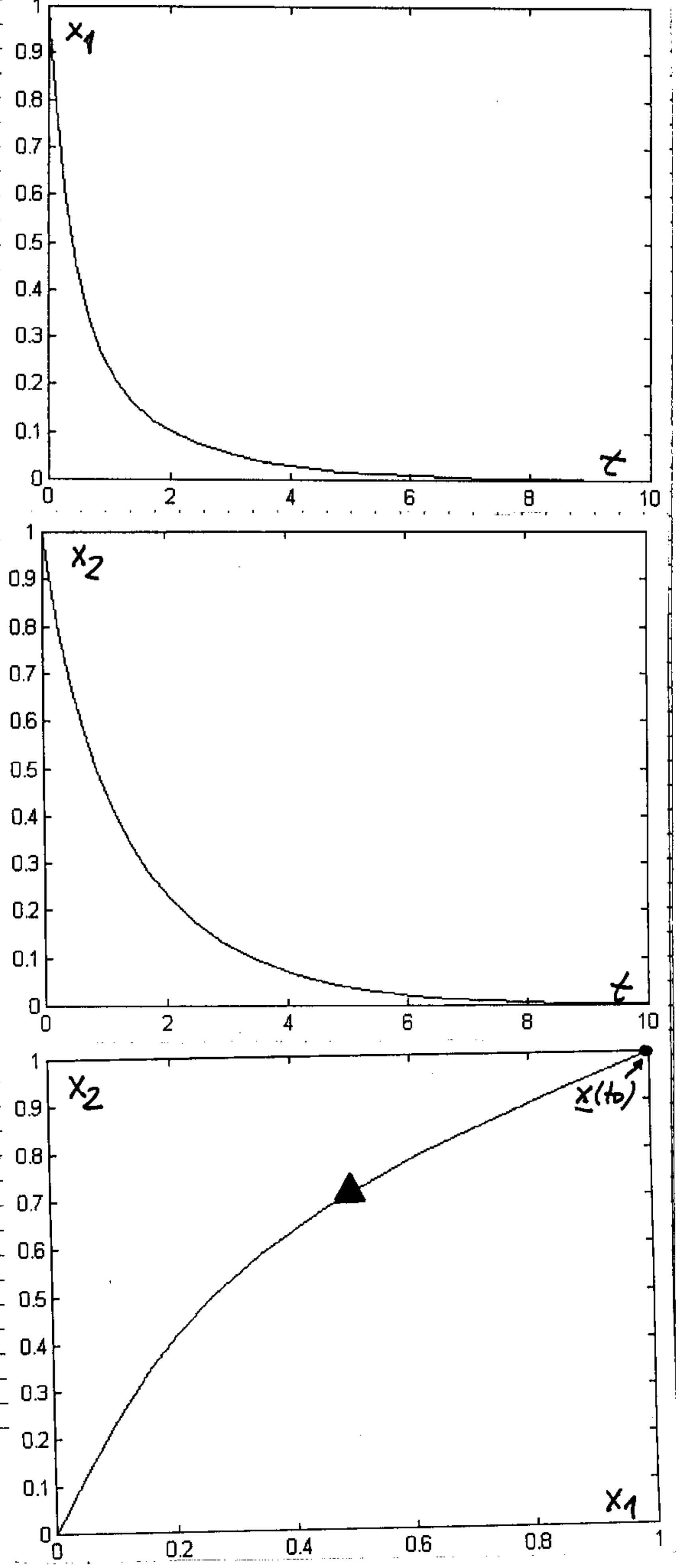
$f^T(x) f(x) \to \infty$ gdy $\|x\| \to \infty$ $\to$

Pokazać to!!! stabilny (asymptotycznie) globalnie!

12

Punkt startowy

$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$



12. PRZYKŁAD 4:

Pierwszą metodą Lapunowa rozważyć przypadek systemu

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\varepsilon x_1 - x_2 - a x_1^3 \\ x_1 + a\varepsilon x_2 - a x_2^3 \end{bmatrix} \leftarrow f(x), \quad a>0, \quad \varepsilon>0$$

$\uparrow$ „małe".

Punktem równowagi jest $x=0$.

ROZWIĄZANIE:

Linearyzacja wokół zera:

$$\nabla_x f\Big|_0 = \begin{bmatrix} a\varepsilon - 3a x_1^2 & -1 \\ 1 & a\varepsilon - 3a x_2^2 \end{bmatrix}_{x_1 = x_2 = 0} \rightarrow$$

$$= \begin{bmatrix} a\varepsilon & -1 \\ 1 & a\varepsilon \end{bmatrix} \rightarrow \text{wartości własne układu zlinearyzowanego}$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - a\varepsilon & 1 \\ -1 & \lambda - a\varepsilon \end{vmatrix} = (\lambda - a\varepsilon)^2 + 1 = 0$$

$$(\lambda - a\varepsilon)^2 = -1 \rightarrow \boxed{\lambda_{1,2} = a\varepsilon \pm j}$$

$a>0 \rightarrow$ niestabilny punkt !!! równowagi

13. PRZYKŁAD 5:

Rozważmy ten sam system co w poprzednim przykładzie, ale użyjmy drugiej metody Lapunowa.

Jako funkcję Lapunowa przyjmijmy „funkcję energetyczną"

$$V(x) = x_1^2 + x_2^2 = x^T x \quad (\equiv \|x\|_2^2)$$

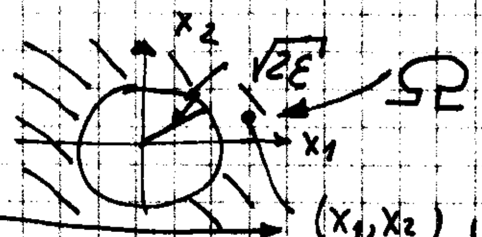
14) Widzimy, że: $\underline{V(x)>0, \forall t, \forall x \neq 0}$, $\underline{V(0)=0, \forall t}$

Teraz $\dot{V}(x)$:

$$\underline{\dot{V}(x) = (\dot{x^T x}) = \dot{x}^T x + x^T \dot{x} = 2x^T f}$$, czyli po podstawieniu f:

$$\dot{V}(x) = 2a\varepsilon x_1^2 - 2x_1x_2 - 2ax_1^4 + 2x_1x_2 + 2a\varepsilon x_2^2 - 2ax_2^4 =$$
$$= -2a(x_1^4 + x_2^4) + 2a\varepsilon(x_1^2 + x_2^2)$$

Można zatem pokusić się o określenie obszaru Ω, w którym $\dot{V}(x) < 0$



Niech zatem (x_1, x_2) na zewnątrz okręgu o promieniu $\sqrt{2\varepsilon}$,

czyli

$$x_1^2 + x_2^2 > 2\varepsilon$$

Stąd dla takich x

$$\dot{V}(x) = -2a\left[x_1^4 + x_2^4 - \varepsilon(x_1^2 + x_2^2)\right] <$$
$$-2a\left[x_1^4 + x_2^4 - \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)^2\right] =$$
$$= -a\left[2x_1^4 + 2x_2^4 - x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 - x_2^4\right] =$$
$$= -a(x_1^4 - 2x_1^2x_2^2 + x_2^4) =$$
$$= \underline{-a(x_1^2 - x_2^2)^2} \ \underline{\text{a to}} \ \underline{\leq 0}$$

amplituda ($\leq \sqrt{2\varepsilon}$)

Zatem dla $x \in \Omega$ $\underline{\dot{V}(x) < 0}$.

<u>Wniosek</u>: wokół $x=0$ musi istnieć „mały" <u>cykl graniczny</u>, bo

- dostatecznie blisko $x=0$ – amplituda drgań narasta (<u>niestabilność</u>), ale po przekroczeniu pewnej wartości $\|x\|_2^2 < 2\varepsilon$ <u>układ stabilny</u>, więc drgania muszą maleć...

Punkt startowy

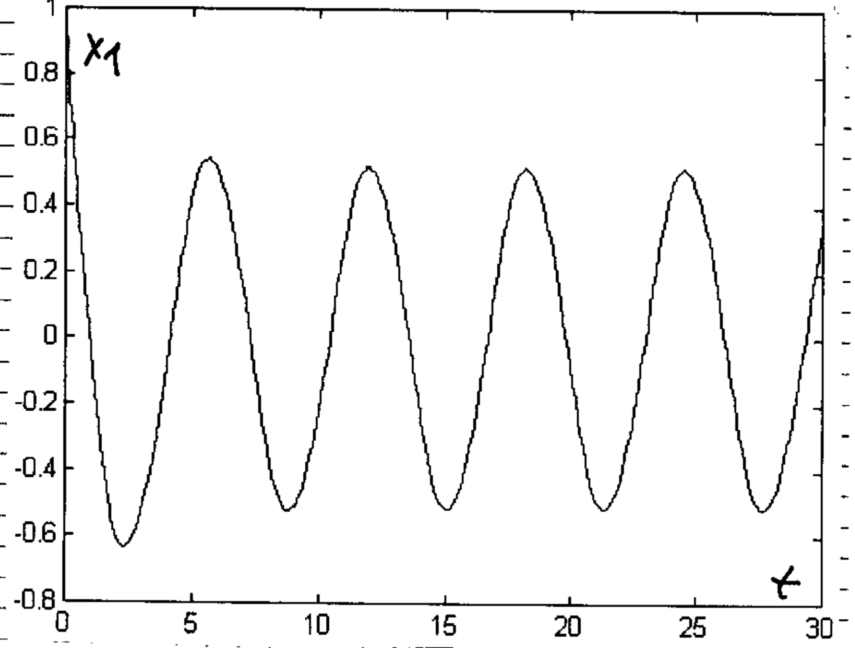
$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

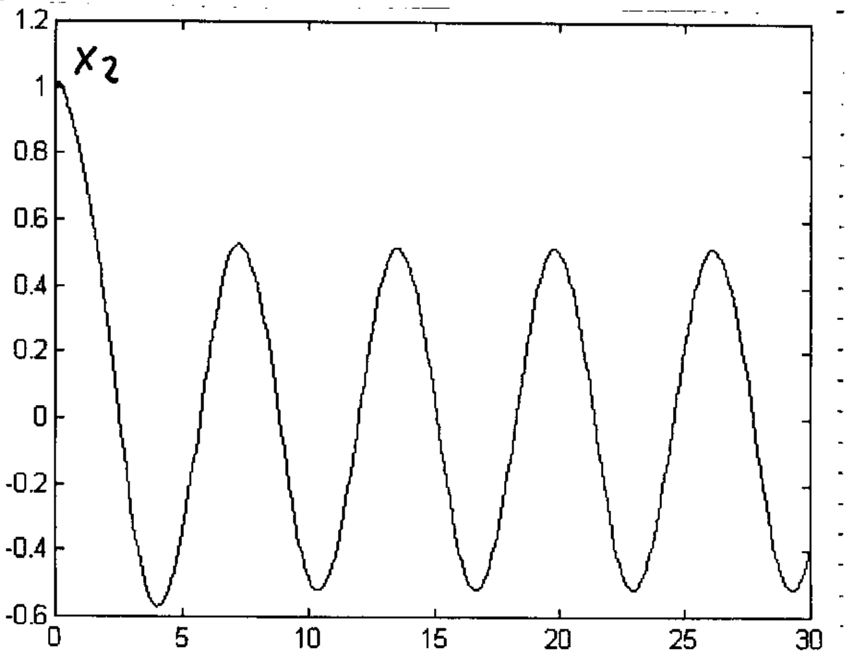
→ zbiorem inwariantnym jest cykl graniczny

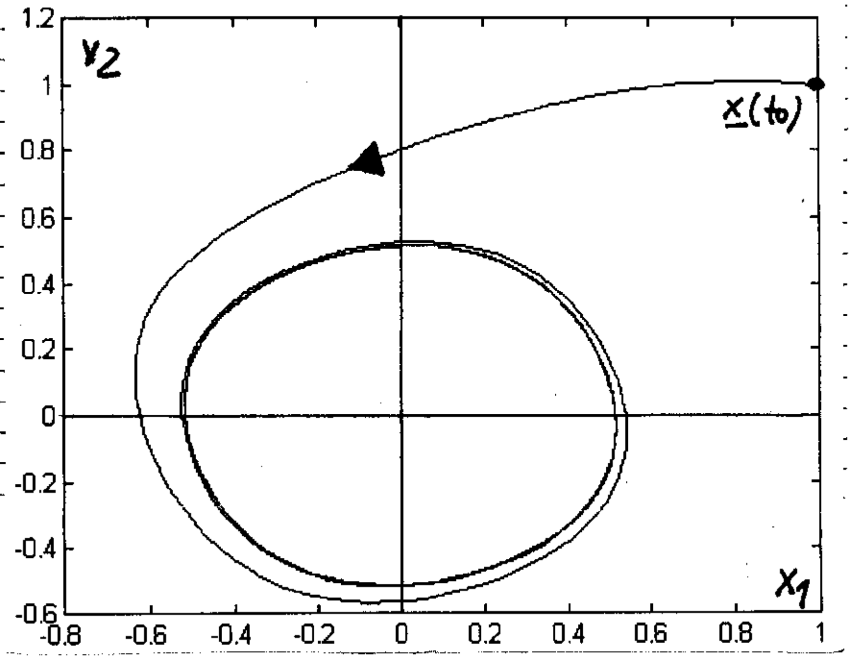
$a = 1$

$\varepsilon = 0{,}2$

Do cyklu granicznego dochodzi się "z zewnątrz"







14")

Punkt startowy

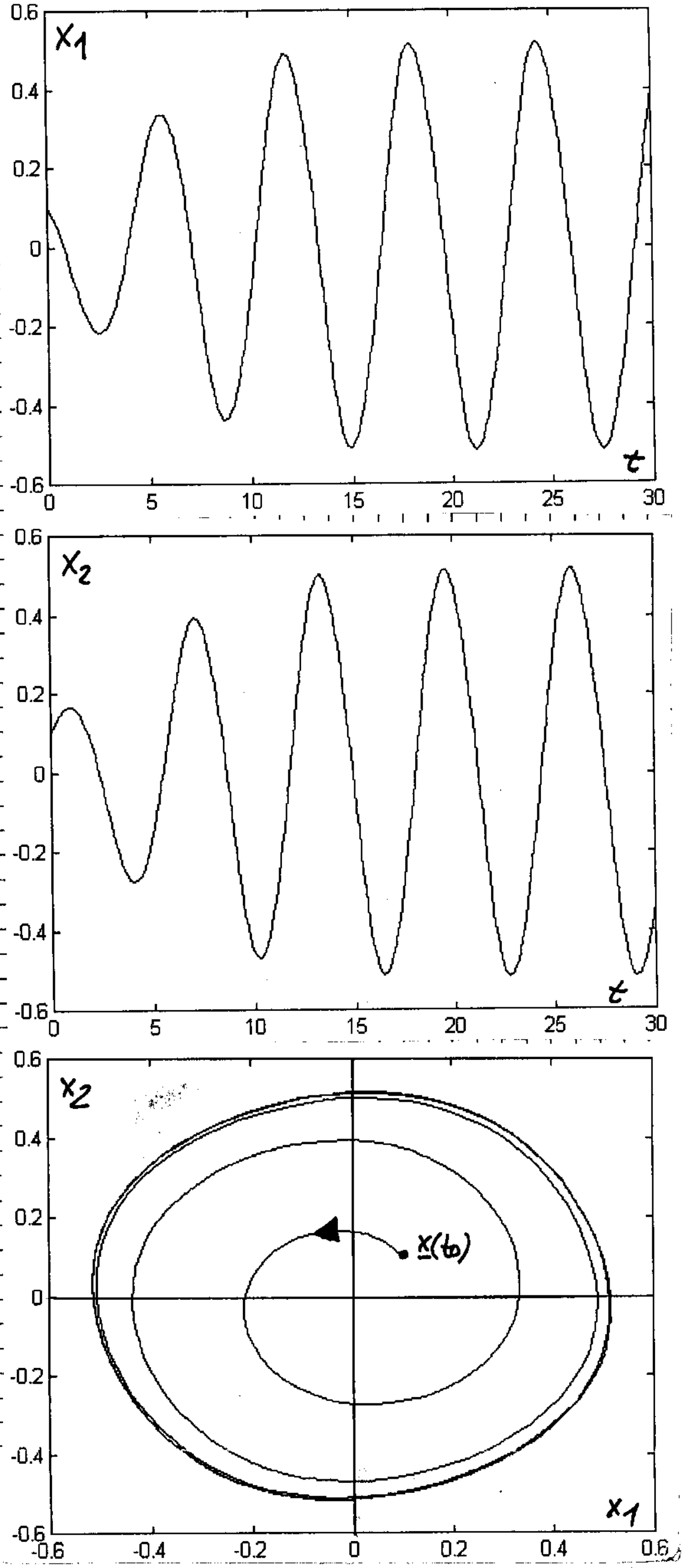
$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} 0{,}1 \\ 0{,}1 \end{bmatrix}$

→ zbiorem inwariantnym jest cykl graniczny

$a = 1$

$\varepsilon = 0{,}2$

Do cyklu granicznego dochodzi się "od wewnątrz"



15) 14. PRZYKŁAD 6: (1-wsza metoda L)

Dane jest równanie różniczkowe

$$\ddot{x} + \dot{x} + x(x-1)(x+1) = 0$$

Znaleźć punkty równowagi oraz określić ich stabilność

ROZWIĄZANIE:

Równanie stopnia 2-go → sprowadzamy do układu równań 1-go stopnia $\dot{x} = f(x)$

$$(\dot{X}) \equiv \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \quad (\equiv \dot{x}) \\ \dot{x}_2 = -x_2 - x_1(x_1^2 - 1) \end{cases} \qquad \begin{aligned} f_1(x_1, x_2) &= x_2 \\ f_2(x_1, x_2) &= -x_2 - x_1(x_1^2-1) \end{aligned}$$

Punkty równowagi dane są przez równanie

$$f(X) = 0 \qquad \begin{cases} x_2 = 0 \\ -x_2 - x_1(x_1^2-1) = 0 \end{cases}$$

A zatem trzy punkty równowagi
$(0,0)$, $(-1,0)$, $(1,0)$
1^0 2^0 3^0

Trzeba kolejno zająć się każdym punktem:

1^0 $$\nabla_x f = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3x_1^2 + 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[(0,0)]{} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ -1 & \lambda+1 \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 1 (= 0)$$

$\lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$, zatem jeden z pierwiastków zlinearyzowanego równania jest "niestabilny"
punkt $(0,0)$ jest niestabilny!

2^0 Punkt $(-1,0)$ → trzeba sprowadzić do początku układu współrzędnych: (transformacja liniowa $\boxed{x_1' = x_1 + 1}$:

16)

$(-1,0) \longrightarrow (0,0) \qquad (x_1 = x_1' - 1)$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1' \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 - (x_1'-1)(x_1'-2)\, x_1' \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 - (x_1'^2 - 2x_1' - x_1' + 2)\, x_1' \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 - x_1'^3 + 3x_1'^2 - 2x_1' \end{bmatrix}$$

$$\nabla f \Big|_{\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2 \end{bmatrix} = 0} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} \lambda & -1 \\ 2 & \lambda+1 \end{bmatrix}$$

Stąd równanie charakterystyczne

$$\lambda^2 + \lambda + 2 = 0 \quad , \quad \lambda_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{7}}{2} \longrightarrow$$

Punkt $(-1,0)$ jest stabilny asymptotycznie <u>(lokalnie!)</u>.

3° <u>Punkt $(1,0)$</u> $\rightarrow$ transformacja $x_1' = x_1 - 1$

czyli $x_1 = x_1' + 1$

Stąd
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1' \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 - (x_1'+1)(x_1')(x_1'+2) \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ -x_2 - x_1'^3 - 3x_1'^2 - 2x_1' \end{bmatrix}$$

Linearyzacja w $(0,0)$ daje

$$\nabla f_{(0,0)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \text{czyli jak dla } 2°$$

Zatem punkt równowagi $(1,0)$ jest <u>lokalnie stabilny asymptotycznie</u>.

17)

15. UWAGI:

Rozważano układy autonomiczne (bez wymuszeń zewnętrznych)

* dla układów liniowych stabilność asymptotyczna punktu równowagi jest warunkiem dostatecznym stabilności BIBO (tak nie jest dla układów n.)
* dla układów nieliniowych sygnał wymuszający ma wpływ na warunki stabilności !!! → wprowadza się tu takie pojęcie stabilności BIBO!

16. (X, d) – przestrzeń metryczna

– jest przestrzenią $\boxed{\text{nie}}$ $\boxed{\text{spójną}}$, gdy

$\exists\, X_1 \subset X,\ X_2 \subset X$ takie, że

1° $X_1, X_2 \neq \emptyset$ ← zbiór zerowy (pusty)

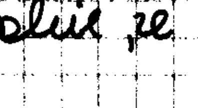
2° $X_1 \cup X_2 = X$

3° $X_1 \cap X_2 = \emptyset$

4° X_1, X_2 są otwarte w X

W przeciwnym razie przestrzeń jest spójna

W analogiczny sposób można mówić o zbiorach spójnych (w definicji można mówić także o zbiorach domkniętych

Np. zbiór niespójny w R^2:  .

17. Istotnym problemem jest określenie obszaru D stabilności asymptotycznej

W szczególności zależy nam na tym

18)

aby dla danego punktu równowagi odosobnionego znaleźć taki obszar $\mathcal{D}$ spójny, który jako zbiór niezmienniczy zawiera tylko analizowany punkt równowagi (byłby to obszar atrakcji danego punktu równowagi). Praktycznie cenne są oczywiście dostatecznie "duże" zbiory atrakcji. Jeśli $x=0$ jest takim badanym punktem to $V(x=0)=0$, zaś w pewnym otoczeniu $x=0$ $V(x)>0, x\neq 0$; $V(x)$ jest funkcją ciągłą zmiennych zbiorów (otoczeń) spójnych (funkcja ciągła na zbiorze spójnym przyjmuje wartości pośrednie (wszystkie)) zatem można szukać obszarów atrakcji wśród obszarów spójnych zdefiniowanych jako

$$\mathcal{D}=\{x: \underline{V(x)<L_0} \quad \text{gdzie } L_0>0\}.$$

L_0 powinno być "duże". ($V(x)=L_0$ to pewna krzywa!)

18. Znalezienie funkcji Lapunowa wielonadkonywnego pomysłowości:

Układ rzędu drugiego

$$\underline{x}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_2\\ -f(\underline{x})\,x_2-g(x_1)\end{bmatrix}$$

$f(x_1,x_2)$

przy czym $f(\underline{x}),\ g(x_1)$ spełniają warunki

19) 1° f, g – funkcje ciągłe

2° $g(x_1)\,x_1 > 0 \quad \forall x_1 \neq 0, \ \forall t$

3° $f(x_1, x_2) > 0, \quad \forall x_1, x_2, \forall t$.

Jako funkcję Lapunowa przyjmuje się wówczas

$$\boxed{V(x_1,x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1} g(y)\,dy}$$

19. PRZYKŁAD 7:

Wróćmy do przykładu 6, poszukując obszarów stabilności asymptotycznej dla punktów równowagi $(-1,0)$ i $(1,0)$ układu

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1(x_1^2-1) - x_2 \end{cases}$$

Tak jak poprzednio, dokonujemy transformacji

$$x_1 = x_1' - 1 \quad \text{stąd}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1' = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_2 - (x_1'-1)(x_1'-2)x_1' \\ \quad\ = -x_2 - x_1'^3 + 3x_1'^2 - 2x_1' \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{punkt równowagi}$$

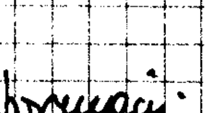
Jako funkcję Lapunowa proponuje się zatem

dla tego punktu równowagi stabilnej

$$V_1(x_1', x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \int_0^{x_1'} (y^3 - 3y^2 + 2y)\,dy =$$

$$\boxed{V_1(x_1', x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \frac{1}{4}x_1'^4 - x_1'^3 + x_1'^2}$$

Trzeba obliczyć $\dot{V}_1(x_1', x_2)$:



$g(x_1') = x_1'(x_1'-1)(x_1'-2)$

$x_1\, g(x_1) > 0$ dla $x_1' < 1$, $x_1' > 2$

20) $$\dot V_1(x_1', x_2) = \frac{2\cdot x_2}{2}\cdot \dot x_2 + 4\cdot\frac{1}{4}x_1'^3\cdot \dot x_1' - 3x_1'^2\cdot \dot x_1' + 2x_1'\dot x_1'$$

$$= x_2\cdot \dot x_2 + x_1'^3\cdot x_2 - 3x_1'^2\cdot x_2 + 2x_1'\cdot x_2 =$$

$$= x_2(\dot x_2 + x_1'^3 - 3x_1'^2 + 2x_1') =$$

$$= x_2(\underbrace{-x_2 - x_1'^3 + 3x_1'^2 - 2x_1'}_{\dot x_2} - \ ) =$$

$$\boxed{\dot V_1(x_1', x_2) = -x_2^2}$$

Jest ujemnie określona dla $\forall x_1, \forall x_2 \neq 0$ (bo x_2).

(Zatem mamy przypadek $\underline{\dot V_1(x) \leq 0}$ → należy rozpatrzyć zbiór inwariantny – zbiór ten składa się z trzech punktów równowagi. Trzeba teraz zrobić takie spójne otoczenia punktów równowagi (możliwie "duże"), aby w każdym takim otoczeniu znajdował się jeden punkt równowagi. Ponieważ zbiór inwariantny składa się tylko z punktów równowagi, zatem gdy w danym obszarze będzie tylko jeden punkt inwariantny zapis $x \to I x$ oznacza właśnie asymptotyczne dążenie do owego punktu. (Dla $x \in D$ musi być oczywiście $V(x) > 0$, $V(0) = 0$).

Zatem "dekompozycja" R^2 na takie obszary spójne, w których $V_1(x) > 0$ i tylko jeden punkt równowagi (oczywiście dla naszego przypadku interesuje nas tylko $x_1' < 1$

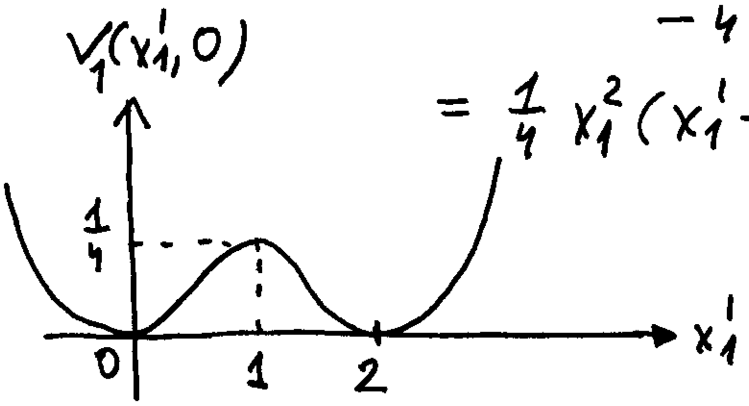
21) Szukamy zatem $V_1(x_1', x_2) < L_0$, gdzie $\underline{L_0}$ ma być dostatecznie duże, a jednocześnie zapewnia <u>spójność</u> i <u>"jedno-atrakcyjność"</u> odpowiedniego obszaru.

Komputer! Najlepiej byłoby uczynić wykres trójwymiarowy i badać odpowiednie przekroje L_0. Pewnym rozwiązaniem są <u>"cięcia" płaszczyznami $x_1' = 0$ oraz $x_2 = 0$</u>

$$V_1(x_1', x_2)\Big|_{x_2=0} = \frac{1}{4} x_1'^4 - x_1'^3 + x_1'^2 =$$

$$= x_1'^2\left(\frac{1}{4} x_1'^2 - x_1 + 1\right) = \frac{1}{4} x_1'^2 (x_1'^2 - 4x_1 + 4) =$$

$$= \frac{1}{4} x_1^2 (x_1' - 2)^2$$

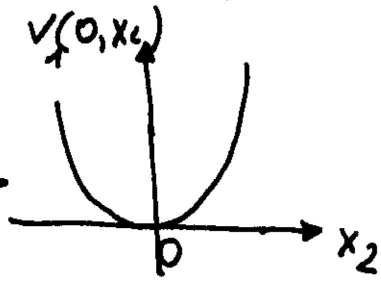


$\to$ maksimum lokalne dla <u>$x_1' = 1$</u>

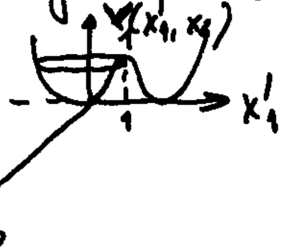
$$V_1(x_1', 0)\Big|_{x_1'=1} = \frac{1}{4}$$

Teraz drugie cięcie

$$V_1(x_1', x_2)\Big|_{x_1'=0} = \frac{x_2^2}{2} \longrightarrow$$



Kto ma wyobraźnię przestrzenną, ten wszystko widzi:



Obszarem spójnym będzie zatem obszar

22)

zdefiniowany następująco

$$R^2 \supset D_1' = \{ (x_1', x_2) : V_1(x_1', x_2) < \tfrac{1}{4} \wedge x_1' < 1 \}$$

(dla pierwszego punktu równowagi)

Zauważmy, że można wziąć $L_0 < \frac{1}{4}$, ale warto wybierać zbiory "możliwie duże").

Wreszcie transformacja "odwrotna" $(x_1', x_2) \to (x_1, x_2)$

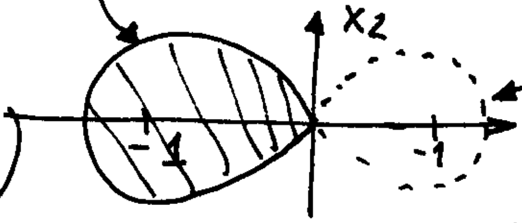
Stąd

$$R^2 \supset D_1 = \{ (x_1, x_2) : V_1(x_1+1, x_2) < \tfrac{1}{4} \wedge x_1 < 0 \}$$

Można próbować określić brzeg owego obszaru (czyli odpowiednią krzywą

$$\frac{x_2^2}{2} + \frac{1}{4}(x_1+1)^4 - (x_1+1)^3 + (x_1+1)^2 = \frac{1}{4}$$

(widoczna symetria względem osi x_1)



W analogiczny sposób można określić zbiór "atrakcyjności" D_2 dla drugiego punktu równowagi: $(1, 0)$:

$$R^2 \supset D_2 = \{ (x_1, x_2) : V_2(\underbrace{x_1 - 1}_{x_1'}, x_2) < \tfrac{1}{4} \wedge x_1 > 0 \}$$

gdzie dla $x_1' = x_1 - 1$ mamy

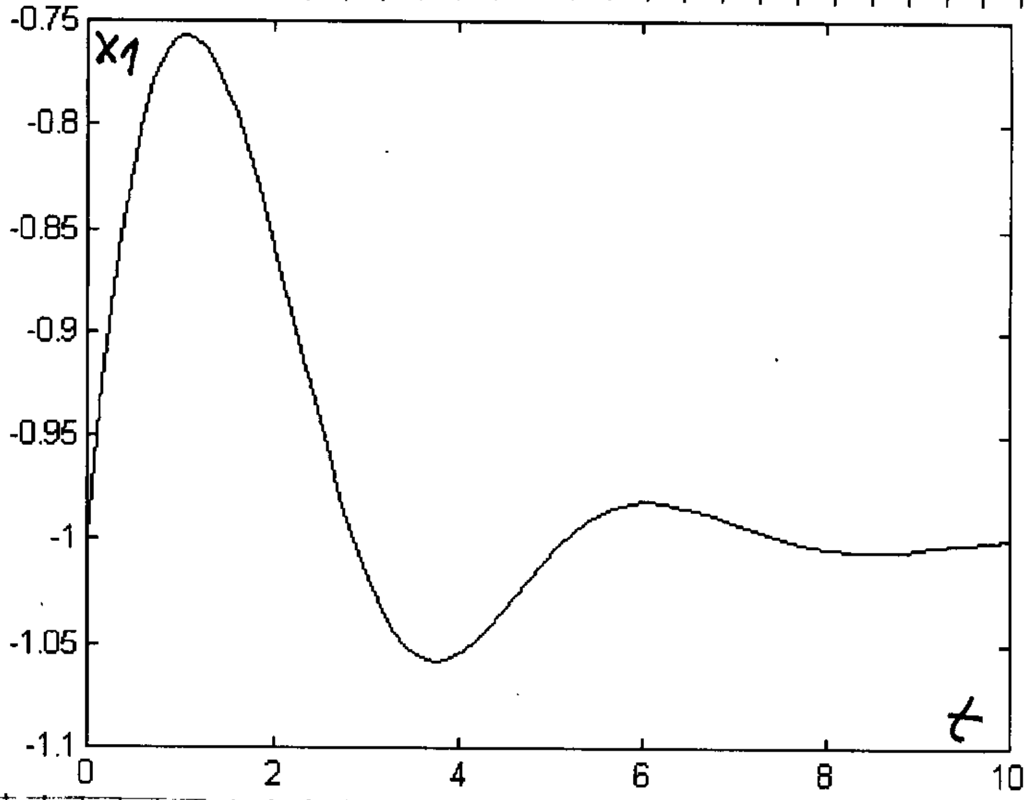
$$V_2(x_1', x_2) = \frac{x_2^2}{2} + \frac{1}{4} x_1'^4 + x_1'^3 + x_1'^2$$

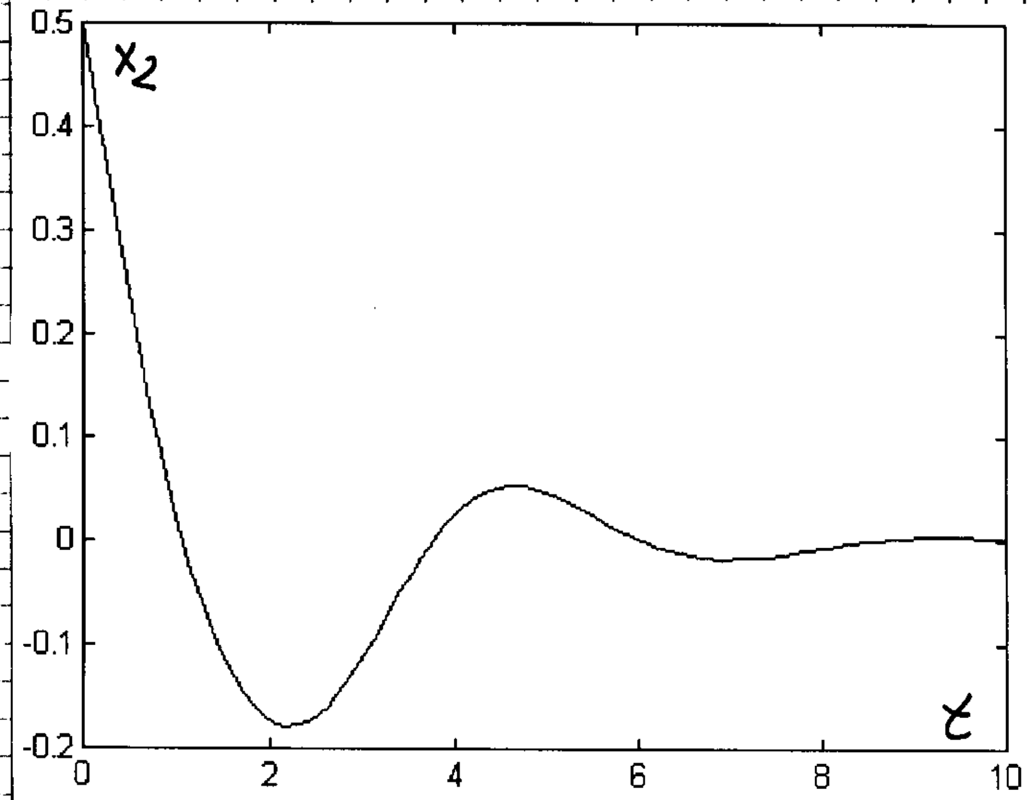
co daje "symetryczny" obraz ~~ko~~ D_2 na odpowiednim rysunku.

23)

Punkt startowy:

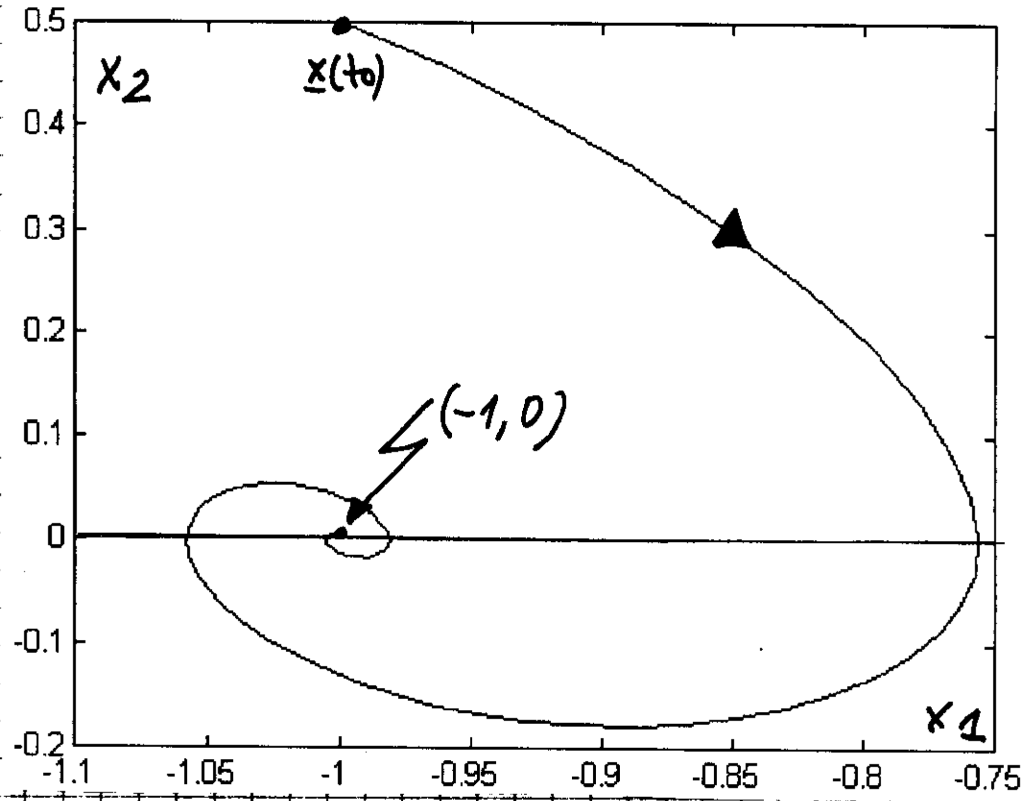
$\underline{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \in D_1$



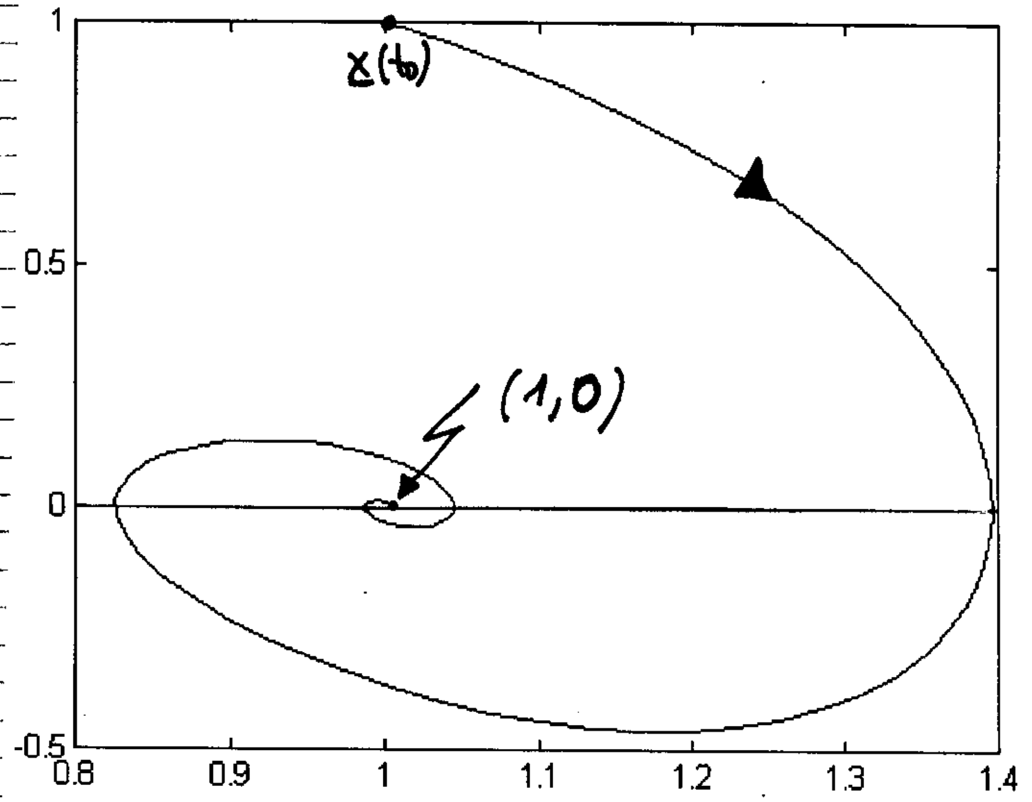


24)

Trajektoria stanu dla $x(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} \in D_1$



Trajektoria stanu dla $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ – jak widać trafiamy do 3° czyli (1,0)



UWAGA: gdy $x(t_0) \notin D_1$, to stąd wcale nie wynika, że $\underline{x}(t) \not\to \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$!!!

Nam obszar D_1 jest "ieto" na pewno

spójny!!!