• RELACJE

$R \subset X \times X$

$R \subset X \times Y$

R. ODWROTNA

$R^{-1} =$

$\{(y,x) \subset Y \times X :$

$(x,y) \in R \subset X \times Y\}$

- SUPERPOZYCJA

$R \subset X \times Y$

$G \subset Y \times Z$

$$R \circ G = \{(x,z) \in X \times Z :$$

$$\exists_{y \in Y} (x,y) \in R \wedge (y,z) \in G$$

- R. ZWROTNA

$$\forall_{x \in} (x,x) \in R$$

- R. SYMETRYCZNA

$$R \subset R^{-1}$$

$$\forall_{x,y \in X \times Y} (x,y) \in R \Rightarrow (y,x) \in R$$

- **R. PRZECHODNIA**

$$R \circ R \subset R$$

$$\forall_{\substack{(x,y)\in X\times Y \\ (y,z)\in X\times X}}$$

$$(x,y)\in R \;\wedge$$
$$(y,z)\in R$$
$$\Downarrow$$
$$(x,z)\in R$$

- RELACJA
  ZWROTNA
  SYMETRYCZNA
  PRZECHODNIA

↓

R. RÓWNOWAŻNOŚCI

- PODZIAŁ NA
  KLASY!
  $\{[x]\}$

ODWZOROWANIE

$R: X \to Y$

$R \subset X \times Y$

- $(x, y) \in R \wedge (x, z) \in R$

$$\Downarrow$$

$y = z$

- $\{x \in X : \exists_{y \in Y} (x, y) \in R\} = X$

- **OBRAZ**

$A \subset X$

$$\boxed{R: X \to Y}$$

$$R(A) = \left\{ y \in Y : \exists_{x \in A \subset X} R(x) = y \right\}$$

- **PRZECIWOBRAZ**

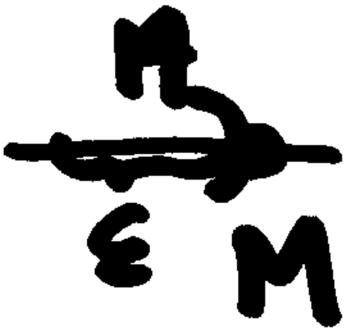
$A \subset Y$

$$R^{-1}(A) = \left\{ x \in X : R(x) \in A \subset Y \right\}$$

• KRESY

$A \subset \mathbb{R}$

$\boxed{M = \sup A}$



- $\forall_{x\in A}\; x \le M$
- $\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{x\in A}\; x > M - \varepsilon$

$m = \inf A$

- $\forall_{x\in A}\; x \geq m$
- $\forall_{\varepsilon>0}\, \exists_{x\in A}\; x < m + \varepsilon$

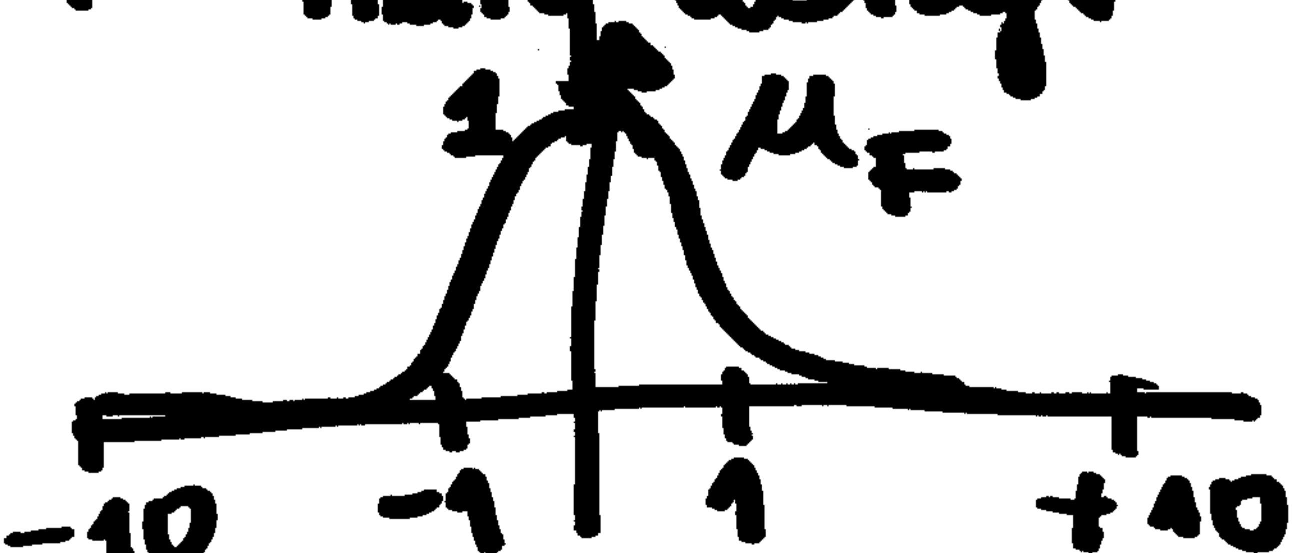
• ZBIÓR ROZMYTY

$$F = \{X, \mu_F, [0,1]\}$$

$$\mu_F : X \rightarrow [0,1]$$

$$X = [-10, +10]$$

F – „mały uchyb"



SECYFIKACJA:

* $F = \{(x, \mu_F(x)) : x \in X, \mu_F(x) \in [0,1]\}$

* $F = \sum_{x \in X} \mu_F(x)/x$

* $F = \int_X \mu_F(x)/x$

• ROZMYTY $\leftrightarrow$ NIEROZMYTY

* f. CHARAKTERYSTYCZNA

$A \subset X$

$$\chi_A : X \to [0,1]$$

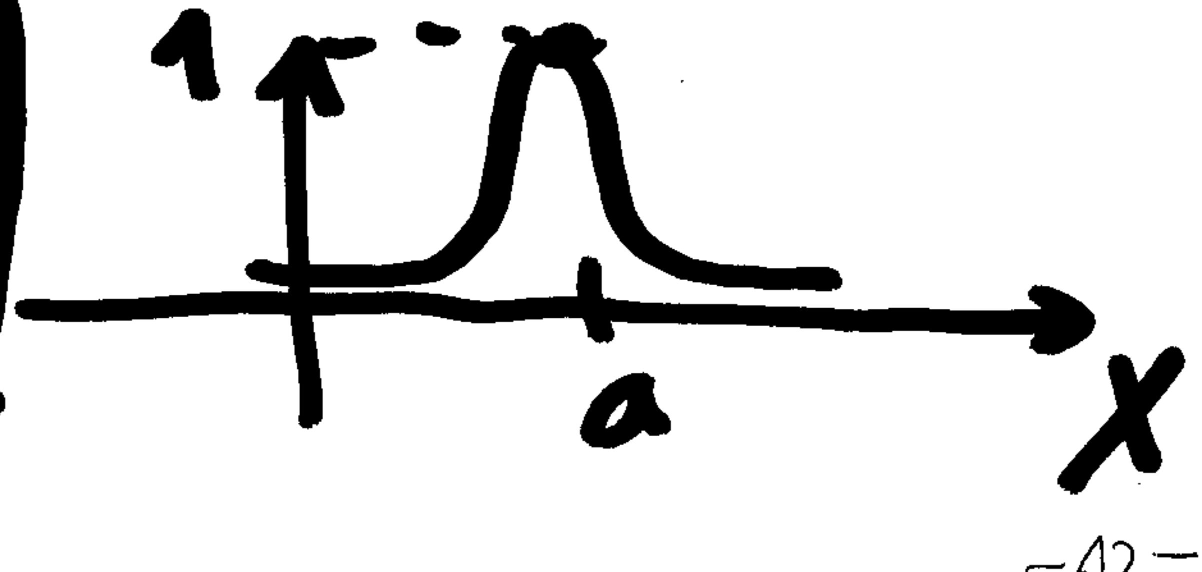
$$\chi_A(x) = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$$

$a \in X$

$\mu_{\text{"blisko a"}} : X \to [0,1]$

$\Rightarrow f\,\mu_{\text{"blisko a"}}(x) =$

$\begin{cases} \chi_{\{a\}}(x) \\ \end{cases}$



- $hgh(F) =$

$$\sup_{x \in X} \mu_F(x)$$

$$\max_{x \in X} \mu_F(x)$$

- Zbiór <u>normalny</u>

$$hgh(F) = 1$$

- NORMALIZACJA

$$\mu_F \rightarrow \mu_F / hgh(F)$$

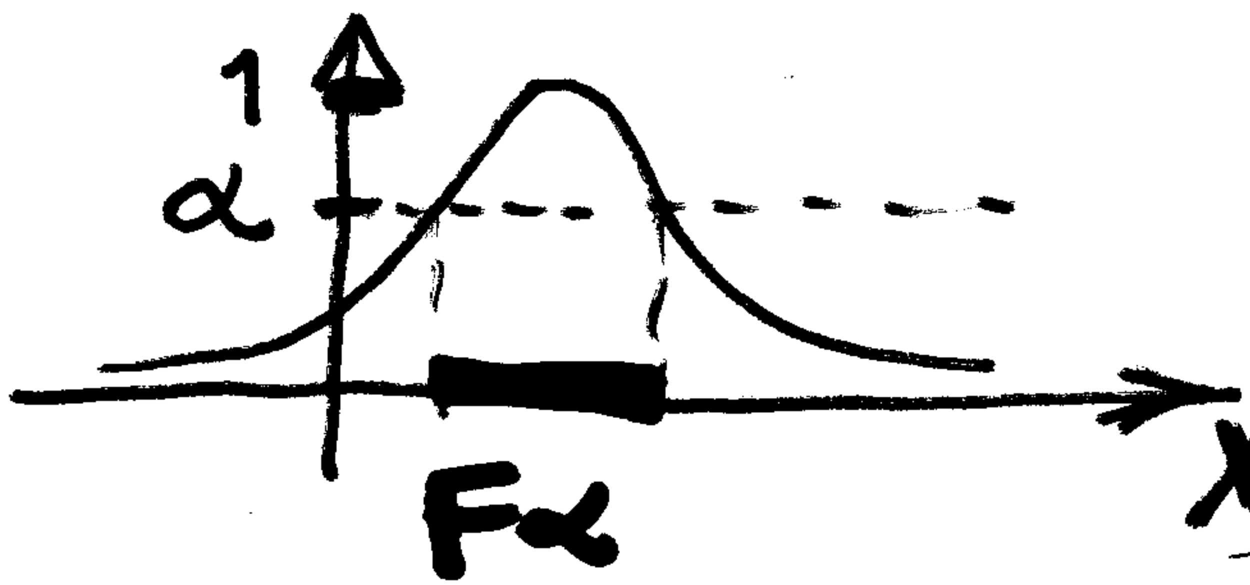
- Z. <u>PUSTY</u> ($\emptyset$)

$\mu_{\emptyset}(x) = 0, \forall x \in X$

- $F \in \mathcal{F}(X)$

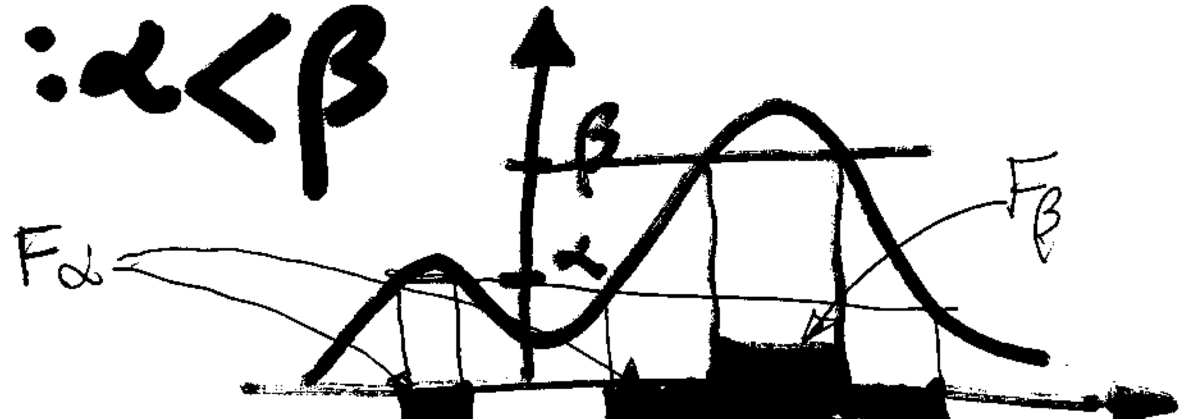
$\alpha \in [0,1]$ <u>α-przekrój</u>

$F_\alpha = \{x \in X : \mu_F(x) \geq \alpha\}$



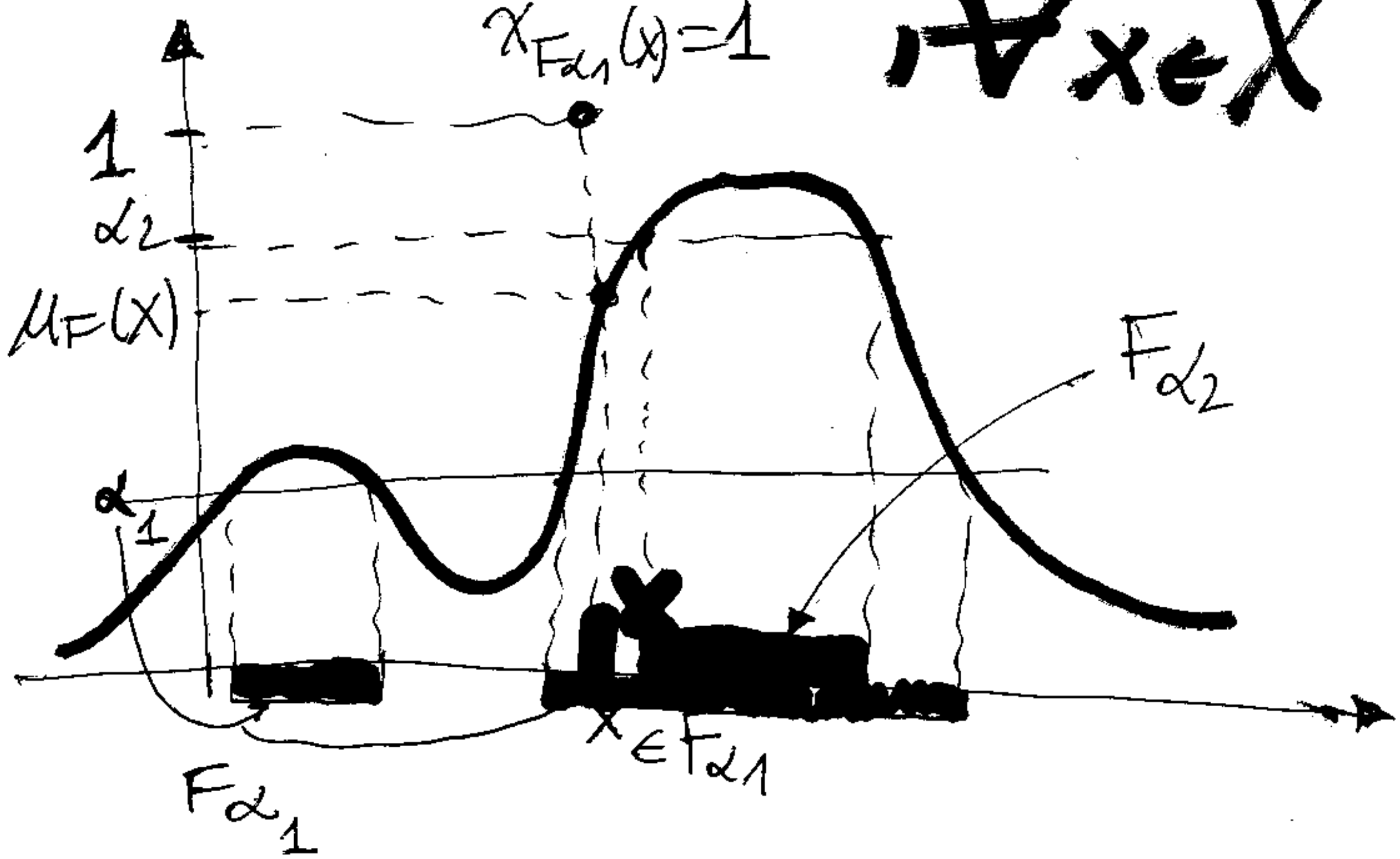
TW. $F \in \mathcal{F}(\alpha)$
$\alpha, \beta \in [0,1]$

- $F_0 = X$
- $(\alpha < \beta) \Rightarrow F_\alpha \supseteq F_\beta$
- $$\bigcap_{\alpha : \alpha < \beta} F_\alpha = F_\beta$$



TW. $F \in \mathcal{F}(X)$

$$\mu_F(x) = \sup_{\alpha \in [0,1]} \{ \min(\alpha, \chi_{F_\alpha}(x)) \} \quad , \forall x \in X$$



$F \in \tilde{\mathcal{F}}(X)$

- NOŚNIK

$\operatorname{supp} F =$

$= \{x \in X : \mu_F(x) > 0\}$

- JADRO

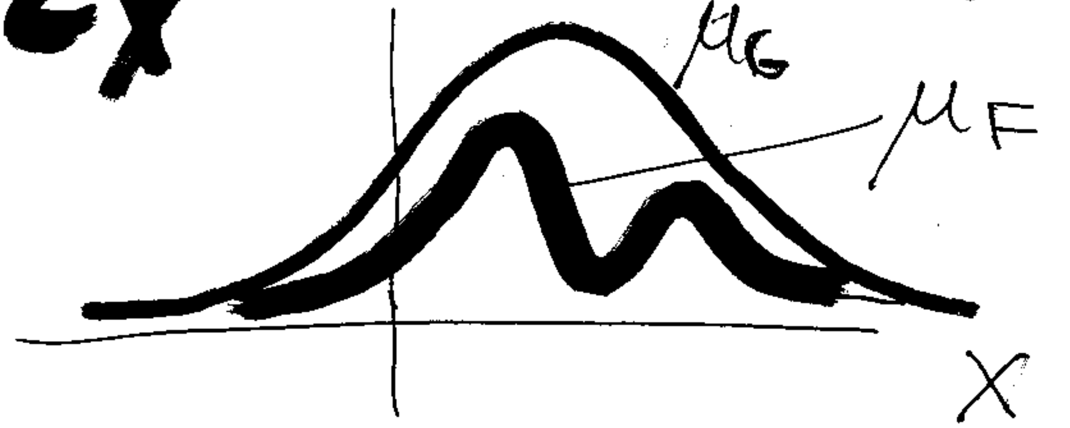
$\operatorname{core} F =$

$\{x \in X : \mu_F(x) = 1\}$

• $F, G \in \mathcal{F}(X)$

INKLUZJA

$$F \subseteq G \iff \forall_{x \in X} \ \mu_F(x) \le \mu_G(x)$$



• IDENTYCZNOŚĆ

$$F = G \iff \mu_F \equiv \mu_G$$

- $\forall \; \chi_{\emptyset} \subseteq F \subseteq \chi_X$
  $F \in \mathcal{F}(X)$

- $\forall$
  $F, G \in \mathcal{F}(X)$
  $(F \subseteq G) \wedge (G \subseteq F)$
  $\Rightarrow \underline{F = G}$

DZIAŁANIA NA $\mathcal{F}(X)$

$$g: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathcal{F}$$

$$g: [0,1]^2 \to [0,1]$$

(BINARNE)

- zbiór identyczności g

$$A \in \mathcal{F}(X)$$

$$\forall_{F \in \mathcal{F}(X)} \; g(A,F) = g(F,A) = F$$

• działanie idempotentne

$$\forall_{a\in[0,1]}\ g(a,a)=a$$

T-NORMA

• $\forall_{a\in[0,1]}\ T(a,1)=a$ (element jedności

• $\forall_{\substack{a,b,c\in[0,1]\\ a\leq b}}\ T(a,c)\leq T(b,c)$ (monotoniczność)

• $\forall_{a,b\in[0,1]}\ T(a,b)=T(b,a)$ przemienność

• $\forall_{a,b,c\in[0,1]}\ T(a,T(b,c))=T(T(a,b),c)$ łączność

S-NORMA
(T-KONORMA)

- $\forall_{a\in[0,1]}\ S(a,0)=a$ (element jednostkowy)
- monotoniczność
- przemienność
- łączność

WŁASNOŚCI:

* ZBIORY IDENTYCZNOŚCIOWE

χ_X – dla T

$\chi_\emptyset$ – dla S

* f. niemalejące

$$\forall_{a,b,c,d} \quad \begin{matrix} T(a,c) \leq T(b,d) \\ S(a,c) \leq S(b,d) \end{matrix}$$

$a \leq b,\ c \leq d$

$$\Uparrow \quad T(a,c) \leq T(b,c) \leq T(b,d)$$

---

*

$$T(0,1) = T(1,0) = T(0,0) = 0$$

$$T(1,1) = 1$$

$$S(1,1) = S(1,0) = S(0,1) = 1$$

$$S(0,0) = 0$$

• UZUPEŁNIENIE

$\overline{} : [0,1] \to [0,1]$

* $\overline{0} = 1$

* $\forall_{\substack{a,b \in [0,1] \\ a \leq b}} \quad \overline{a} \geq \overline{b}$

* $\forall_{a \in [0,1]} \quad \overline{\overline{a}} \equiv (\overline{\overline{a}}) = a$

$\overline{1} = 0 \ (!)$

- $F \in \mathcal{F}(X)$

$\overline{F} \in \mathcal{F}(X)$

$$\boxed{\mu_{\overline{F}} = \overline{\mu_F}}$$

- PARA DUALNA (T,S)

(SPRZĘŻON) WZGLĘDEM

$-$

$$\underset{(a,b)\in[0,1]^2}{\forall} \; S(a,b) = \overline{T(\overline{a},\overline{b})}$$

- **PRAWA DE MORGANA DLA PARY DUALNEJ $(T, \bar{S})$:**

$*\ \forall_{F, G \in \mathcal{F}(X)}$

$$\overline{T(F, G)} = S(\overline{F}, \overline{G})$$

$$\overline{S(F, G)} = T(\overline{F}, \overline{G})$$

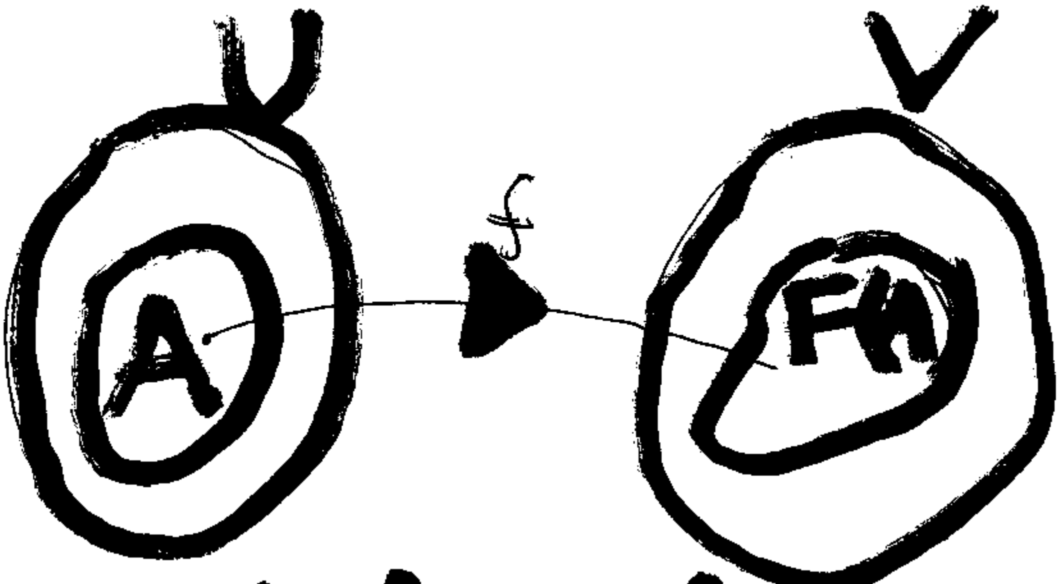
T-NORMY:

- $T_{MIN}(a,b) = \min\{a,b\}$
- $T_{PROD}(a,b) = ab$
- $T_{ŁUK}(a,b) = \max\left\{\begin{matrix} a+b-1 \\ 0 \end{matrix}\right\}$

S-NORMY:

- $S_{MAX}(a,b) = \max\{a,b\}$
- $S_{SUM}(a,b) = a+b-ab$
- $S_{ŁUK}(a,b) = \min\{a+b,1\}$

ZASADA ROZSZERZANIA



$$f: A \to V$$

$A \in \mathcal{F}(U)$ – rozmyty!

Jak rozmyć $f(A)$?

$$\mu_{f(A)}(v) = \begin{cases} 0 & \text{gdy } f^{-1}(v) = \emptyset \\ \sup_{u \in f^{-1}(v)} \mu_A(u) & \end{cases}$$

ILOCZYN KRTEZJAŃSKI

$(A, B) \subset \mathcal{F}(X) \times \mathcal{F}(Y)$

$\downarrow \quad \downarrow$

μ_A, μ_B

$$\boxed{\mu_{A \times B}(a,b) = \mu_A(a) \otimes \mu_B(b)}$$

najczęściej:

* **min**
* $\cdot$ (iloczyn)